Κάθε μια απο τις ασκήσεις 1-3 έχει βαθμολογική αξία 5 μονάδες, κάθε μια απο τις 4-6, 12 μονάδες και κάθε μια απο τις 7-9, 20 μονάδες. Άριστα είναι οι 100 μονάδες.

1. Ποιές απο τις παρακάτω συναρτήσεις αποτελούν λύση της εξίσωσης $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
   (α′) $\cos(3x + y)$ (β′) $x^2 + y^2$ (γ′) $\sin(3x + y)$ (δ′) $e^{-3\pi x}\sin(\pi y)$ (ε′) καμμία απο τις παραπάνω
   Απάντηση (α′) (γ′)

2. Ποιές απο τις παρακάτω εξισώσεις είναι μη-γραμμικές δεύτερης τάξης
   (α′) $y'' + 3y + ty = \sin(t^4)$ (β′) $y' + y^2 = 0$ (γ′) $y'' + \sin(t)y = 0$ (δ′) $yy'' + y' = 1$ (ε′) $(y')^2 + 2y = \tan t$
   (στ′) $y''' + y^2 = 1$ (ζ′) καμμία απο τις παραπάνω
   Απάντηση (δ′)

3. Ποιές απο τις παρακάτω συναρτήσεις αποτελεί γενικευμένη λύση της εξίσωσης $6y^{(4)} + 11y'' + 4y = 0$
   (α′) $y = c_1\cos(\frac{x}{2}) + c_2\sin(\frac{x}{2}) + c_3\cos(\frac{4x}{3}) + c_4\sin(\frac{4x}{3})$
   (β′) $y = c_1\cos(\frac{x}{2}) + c_2\sin(\frac{x}{2}) + c_3\cos(\frac{2x}{3}) + c_4\sin(\frac{2x}{3})$
   (γ′) $y = c_1\cos(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c_2\sin(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c_3\cos(\frac{2x}{\sqrt{3}}) + c_4\sin(\frac{2x}{\sqrt{3}})$
   (δ′) $y = c_1e^{-\frac{4}{3}x} + c_2e^{-\frac{1}{2}x}$
   (ε′) $y = c_1e^{-\frac{4}{3}x} + c_2xe^{-\frac{4}{3}x} + c_3e^{-\frac{1}{2}x} + c_4xe^{-\frac{1}{2}x}$ (στ′) καμμία απο τις παραπάνω
   Απάντηση(γ′)

4. Χρησιμοποιήστε μετασχηματισμούς Λαπλάς για να υπολογίσετε την λύση του προβλήματος
   $$y'' - 3y' + 2y = 2x + 1, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$$
   Απάντηση $2e^x - 2e^{2x} + x + 2$

5. Υπολογίστε την τιμή της λύσης της εξίσωσης $t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 4t\frac{dy}{dt} + 6y = 0$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(1) = 2$ και $y'(1) = -1$ την χρονική στιγμή $t = 2$. Απάντηση $y(2) = -12$

6. Βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος $x'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} x(t)$ για τις οποίες ισχύει $\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   Απάντηση $x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t}$.

7. Χρησιμοποιήστε σειρές Φουριέ για να υπολογίσετε την λύση του εξής προβλήματος
   $$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= u_0 \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$
   Απάντηση Ιδιοτιμές $\lambda_n = \left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{L}\right)^2$, ιδιοδιανύσματα $v_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L}$
   $u(x,t) = \sum_1^\infty b_n e^{-\lambda_n kt}\sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L}$, $b_n = \frac{2u_0}{L}\int_0^L \sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{L}dx$

8. Θεωρήστε το εξής πρόβλημα
   $$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \frac{\pi^2}{4}u - b, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= u_0 \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

(α΄) Περιγράψτε το φυσικό φαινόμενο της διάδοσης της θερμότητας σε μια ραβδο στο οποίο αντιστοιχεί το παραπάνω μαθηματικό μοντέλο.
Απάντηση Η ράβδος έχει μήκος 1 και θερμική αγωγιμότητα 1. Η θερμοκρασία της στα δύο της άκρα παραμένει σταθερή στους 0 βαθμούς. Αρχικά η ράβδος έχει σταθερή θερμοκρασία $u_0$ βαθμούς. Η θερμότητα μεταδίδετε στην ράβδο με ρυθμό $b$ και παράγεται/απορροφάται με ρυθμό ανάλογο (με σταθερά 1/4) της θερμοκρασίας την εκάστοτε συγκεκριμένη στιγμή.
(β΄)Υπολογίστε το όριο της λύσης του παραπάνω προβλήματος για $t \to \infty$.
Απάντηση $u(x) = \frac{4b}{\pi^2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)$

9. Δίνονται δύο δεξαμενές η πρώτη απο τις οποίες περιέχει 200 λίτρα κρασιού και η δεύτερη 100 λίτρα νερού. Υποθέστε ότι ρέει νερό απο την δεύτερη δεξαμενή στην πρώτη με ρυθμό 1 λίτρο το λεπτό και ότι νερωμένο κρασί ρέει απο την πρώτη δεξαμενή στην δεύτερη με τον ίδιο ρυθμό. Υποθέτοντας ότι η μείξη νερού και κρασιού γίνετε στιγμιαία
(α΄) Διατυπώστε το μαθηματικό μοντέλο του παραπάνω προβλήματος. (β΄) Υπολογίστε την ποσότητα $x(t)$ κρασιού που βρίσκεται στην πρώτη δεξαμενή την χρονική στιγμή $t > 0$.
(γ΄) Υπολογίστε την ποσότητα $y(t)$ κρασιού που βρίσκεται στην δεύτερη δεξαμενή την χρονική στιγμή $t > 0$.
(δ΄) Υπολογίστε την μέγιστη ποσότητα κρασιού που μπορεί να περιέχει η δεύτερη δεξαμενή
Απάντηση $x' = -x/200, y' = x/200 - y/100$ $x(t) = Ae^{-t/200} = 200e^{-t/200}$ $y' + y/100 = e^{-t/200}$ $y(t) = 200(e^{-t/200} - e^{-t/100})$ $y'(t) = 0 \Rightarrow 2 = e^{t/200} \Rightarrow t = 200 \ln 2 \Rightarrow y_m = 50.$