

1. (15 μονάδες) Μια δεξαμενή περιέχει αρχικά 300 λίτρα και 3 γραμμάρια / λίτρο μίας ουσίας. Ξαφνικά φρέσκο νερό αρχίζει να ρέει μέσα στη δεξαμενή με ρυθμό 4 λίτρα / λεπτό. Ταυτόχρονα το καλά αναμειγμένο περιεχόμενο της δεξαμενής εκρέει με ρυθμό 6 λίτρα / λεπτό. Ποιο από τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών περιγράφει καλύτερα την συν τω χρόνω εξέλιξη της ποσότητας της ουσίας που περιέχει η δεξαμενή;

$Q' = 12 - \frac{3}{150-t}Q, \quad Q(0) = 300$

$Q' = 12 - \frac{1}{50}Q, \quad Q(0) = 300$

$Q' = -\frac{3}{150+t}Q, \quad Q(0) = 900$

$Q' = -\frac{3}{150-t}Q, \quad Q(0) = 900$

2. (15 μονάδες) Αν γνωρίζουμε ότι η $y = -2te^{2t}$ είναι λύση της εξίσωσης $y'' - 4y' + 3y = g(t)$, σημειώστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις δεν αποτελούν λύσεις της εν λόγω εξίσωσης.

$y = 4e^t - 2e^{3t} + 2te^{2t}$

$y = 4e^t - 2te^{2t}$

$y = 2e^{3t} - 2te^{2t}$

$y = e^t + 2e^{3t+6} - 2te^{2t}$

3. (15 μονάδες) Ποιά από τις παρακάτω εξισώσεις περιγράφει ένα σύστημα ελατηρίου μάζας σε συντονισμό.

$-2y'' - 8y = 7 \cos 2t$

$y'' + 4y' + 4y = -16 \sin 2t$

$y'' - 9y = 6 \sin 3t$

$y'' + 16y = -3 \cos 16t$

4. (25 μονάδες) Δώστε την γενικευμένη λύση της εξίσωσης $y'' + y = \frac{1}{x+1}$.

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x + \left(- \int_0^x \frac{\sin z}{z+1} dz \right) \cos x + \left(\int_0^x \frac{\cos z}{z+1} dz \right) \sin x$$

5. Θεωρήστε το σύστημα $\vec{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \vec{x}$.

(α') (25 μονάδες) Δώστε την γενικευμένη λύση του συστήματος.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

(β') (15 μονάδες) Σχεδιάστε το διανυσματικό πεδίο του συστήματος και την λύση που ικανοποιεί την συνθήκη $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.