Θεωρήστε το σύστημα $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, όπου $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

(α) Δώστε την γενικευμένη λύση του συστήματος.

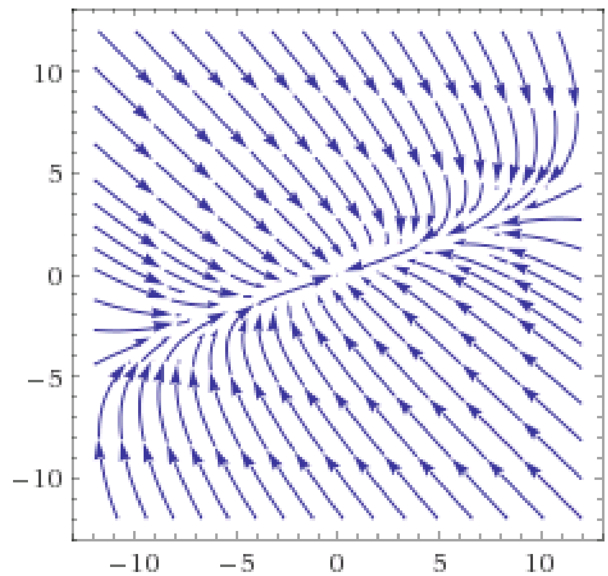
$$\vec{x} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(β) Σχεδιάστε την γενικευμένη λύση του συστήματος τονίζοντας τις λύσεις που ικανοποιούν τις εξής αρχικές συνθήκες:

(1) $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

(2) $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$ και

(3) $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$.



(γ) Υπολογίσετε το e^{At}.

$$\begin{bmatrix} \frac{1+3e^{4t}}{4e^{5t}} & \frac{3\left(-1+e^{4t}\right)}{4e^{5t}} \\ \frac{-1+e^{4t}}{4e^{5t}} & \frac{3+e^{4t}}{4e^{5t}} \end{bmatrix}$$

(δ) Δώστε την λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\vec{x} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-5t} = -\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{-5t}$$

(ε) Αλλάξτε την δεύτερη σειρά του πίνακα A από $1, -4$ σε $0, -2$ και δώστε την γενικευμένη λύση του συστήματος που προκύπτει.

$$\lambda_{1,2} = -2, \vec{v}_1 = [1, 0], \vec{v}_2 = [0, 1/3], \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-2t} + 3c_2 t e^{-2t} \\ c_2 e^{-2t} \end{bmatrix}$$