1. Υπολογίστε τον πίνακα e^{tA} όπου $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ και $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Απάντηση:

$$\begin{bmatrix} e^{at} & b\frac{e^{at}-e^{ct}}{a-c} \\ 0 & e^{ct} \end{bmatrix} e^{at} \begin{bmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Υπολογίστε την λύση του προβλήματος $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Απάντηση:

$$e^{tA} = e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int$$

3. Δώστε τα A_0, B_0, A_n και B_n έτσι ώστε η συνάρτηση

$$u(t,x) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t) \cos n\pi x,$$

να αποτελεί λύση του εξής προβλήματος

$$u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0, u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, u(0,x) = f(x), u_t(0,x) = g(x).$$

4. Αποδείξτε ότι $\pi x = \sin 2\pi x - \frac{1}{2} \sin 4\pi x + \frac{1}{3} \sin 6\pi x - \ldots, \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.