

1. Έστω το σύστημα  $x_1' = 2x_1 - x_2 + f_1$ ,  $x_2' = 4x_1 - 2x_2 + f_2$ ,  $t > 0$ .

(α') Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα (συμβατικά και γενικευμένα) του πίνακα των συντελεστών.

(β') Δώστε όλες τις λύσεις του συστήματος όταν

i.  $f_1 = f_2 = 0$

ii.  $f_1 = t^{-3}$ ,  $f_2 = -t^{-2}$

2. Αποδείξτε ότι αν  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  είναι ιδιοσυναρτήσεις, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές, του προβλήματος

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b), \quad (1)$$

τότε αυτά είναι ορθογώνια μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει  $\int_a^b x_1(t)x_2(t) dt = 0$ .