

Προσπαθήστε να απαντήσετε σε το πολύ 5 από τα παρακάτω 6 βαθμολογικά ισοδύναμα θέματα.

1. Βρείτε την λύση του εξής προβλήματος $x' = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Αν $1+3i$ είναι ιδιοτιμή και $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση της εξίσωσης $x' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} x$ δώστε την γενική λύση της εξίσωσης σαν συνάρτηση πραγματικών (και όχι μιγαδικών) τιμών.

3. Δώστε μια συγκεκριμένη λύση του εξής συστήματος

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -2t-3 \end{bmatrix}$$

εάν γνωρίζεται ότι η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος είναι

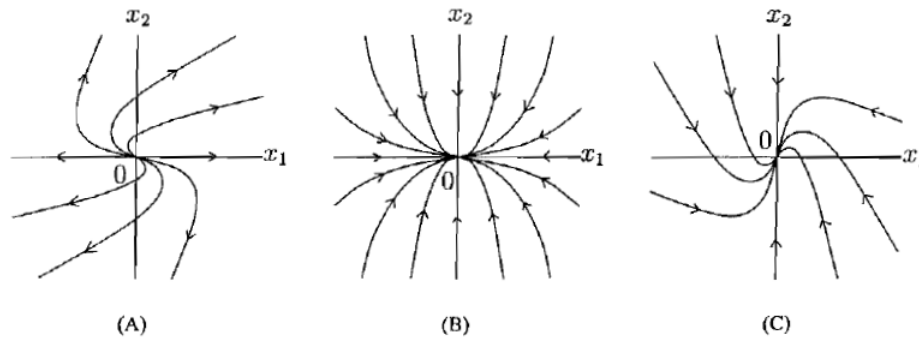
$$x_c = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} t \\ 2t-1 \end{bmatrix}.$$

4. Βρείτε έναν πίνακα A τέτοιον ώστε το σύστημα $x'(t) = Ax(t)$ να έχει την εξής λύση

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos t + 2 \sin t) \\ e^{-t} \cos t \end{bmatrix}.$$

5. Συνταιριάστε τα παρακάτω διανυσματικά πεδία με τα συστήματα $x'(t) = Ax(t)$ για τα οποία έχουμε

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.



6. Βρείτε όλες τις λύσεις του προβλήματος $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1$.