

Διαφορικές Εξισώσεις

Σειρές Fourier

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

29 Απριλίου 2015, Βόλος

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A \cos t + B \sin t$.

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A \cos t + B \sin t$.

Άπειρες λύσεις του προβλήματος: $x = B \sin t$.

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1, \alpha = 0, b = \pi.$

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A \cos t + B \sin t.$

Άπειρες λύσεις του προβλήματος: $x = B \sin t.$

Παράδειγμα: $\lambda = 2, \alpha = 0, b = \pi.$

$$x'' + 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1, \alpha = 0, b = \pi.$

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A \cos t + B \sin t.$

Άπειρες λύσεις του προβλήματος: $x = B \sin t.$

Παράδειγμα: $\lambda = 2, \alpha = 0, b = \pi.$

$$x'' + 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A \cos \sqrt{2} t + B \sin \sqrt{2} t.$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1, \alpha = 0, b = \pi.$

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A \cos t + B \sin t.$

Άπειρες λύσεις του προβλήματος: $x = B \sin t.$

Παράδειγμα: $\lambda = 2, \alpha = 0, b = \pi.$

$$x'' + 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A \cos \sqrt{2}t + B \sin \sqrt{2}t.$

Μοναδική λύση του προβλήματος: $x = 0.$

Προβλήματα ιδιοτιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0, \quad (1)$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(\alpha) = 0, \quad x'(b) = 0, \quad (2)$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = x(b), \quad x'(\alpha) = x'(b), \quad (3)$$

Προβλήματα ιδιοτιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0, \quad (1)$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(\alpha) = 0, \quad x'(b) = 0, \quad (2)$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = x(b), \quad x'(\alpha) = x'(b), \quad (3)$$

Ένα αριθμός λ λέγεται *ιδιοτιμή του προβλήματος συνοριακών τιμών* ανν, με δεδομένο το συγκεκριμένο λ , υπάρχει μη-μηδενική λύση του η οποία λέγεται το αντίστοιχο *ιδιοδιάνυσμα*.

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t.$$

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t.$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$$

$$0 = x(\pi) = B \sin \sqrt{\lambda} \pi \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$$

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t.$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$$

$$0 = x(\pi) = B \sin \sqrt{\lambda} \pi \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \quad \sqrt{\lambda} = k$$

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t.$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$$

$$0 = x(\pi) = B \sin \sqrt{\lambda} \pi \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \quad \sqrt{\lambda} = k$$

Ιδιοτιμές $k^2 \quad \forall k \geq 1$, ιδιοσυναρτήσεις $x = \sin kt$.

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t.$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$$

$$0 = x(\pi) = B \sin \sqrt{\lambda} \pi \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \quad \sqrt{\lambda} = k$$

Ιδιοτιμές $k^2 \quad \forall k \geq 1$, ιδιοσυναρτήσεις $x = \sin kt$.

Αν $\lambda = 0$ η γενική λύση είναι $x = At + B$.

$$x(0) = 0 \Rightarrow B = 0, \quad x(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t.$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$$

$$0 = x(\pi) = B \sin \sqrt{\lambda} \pi \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \quad \sqrt{\lambda} = k$$

Ιδιοτιμές $k^2 \quad \forall k \geq 1$, ιδιοσυναρτήσεις $x = \sin kt$.

Αν $\lambda = 0$ η γενική λύση είναι $x = At + B$.

$$x(0) = 0 \Rightarrow B = 0, \quad x(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

$\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή.

Συμπέρασμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \quad \forall k \geq 1.$$

Συμπέρασμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \quad \forall k \geq 1.$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(\alpha) = 0, \quad x'(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \quad \forall k \geq 1.$$

και

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_0 = 1.$$

Συμπέρασμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(a) = 0, \quad x(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \quad \forall k \geq 1.$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(a) = 0, \quad x'(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \quad \forall k \geq 1.$$

και

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_0 = 1.$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b),$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιανύσματα} \quad \cos kt \quad \text{και} \quad \sin kt \quad \forall k \geq 1,$$

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_0 = 1.$$

Θεώρημα ορθογωνιότητας

Εάν $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις κάποιου προβλήματος που ανήκει σε κάποια από τις προηγούμενες τρεις κατηγορίες προβλημάτων που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 τότε αυτές είναι ορθογώνιες με την εξής έννοια

$$\int_{\alpha}^{\beta} x_1(t)x_2(t) dt = 0.$$

Τριγωνομετρικές ορθογωνιότητες

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin mt)(\sin nt) dt = 0, \quad \text{όταν } m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos mt)(\cos nt) dt = 0, \quad \text{όταν } m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos mt)(\sin nt) dt = 0.$$

Εναλλακτικό θεώρημα του *Fredholm*

Είτε το

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0 \quad (4)$$

έχει μια μη-μηδενική λύση, είτε το

$$x'' + \lambda x = f(t), \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0 \quad (5)$$

έχει μια μοναδική λύση για κάθε συνεχή f .

Εναλλακτικό θεώρημα του *Fredholm*

Είτε το

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0 \quad (4)$$

έχει μια μη-μηδενική λύση, είτε το

$$x'' + \lambda x = f(t), \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0 \quad (5)$$

έχει μια μοναδική λύση για κάθε συνεχή f . Δηλαδή

- Αν το λ δεν είναι ιδιοτιμή, τότε το μη-ομογενές πρόβλημα έχει μοναδική λύση για κάθε δεξιό μέλος.
- Αν το λ είναι ιδιοτιμή τότε το πρόβλημα μπορεί να μην έχει λύση για κάποιες f , και επιπρόσθετα, ακόμα και εάν έχει λύση τότε αυτή δεν θα είναι μοναδική.

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P -περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t + P)$ για κάθε t .

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P -περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t + P)$ για κάθε t .
- Μια P -περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$ -περιοδική, $3P$ -περιοδική ...

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P -περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t + P)$ για κάθε t .
- Μια P -περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$ -περιοδική, $3P$ -περιοδική ...
- $\cos t$ και $\sin t$ είναι 2π -περιοδική

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P -περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t + P)$ για κάθε t .
- Μια P -περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$ -περιοδική, $3P$ -περιοδική ...
- $\cos t$ και $\sin t$ είναι 2π -περιοδική (όπως και οι $\cos kt$ και $\sin kt$ για κάθε ακέραιο k)

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P -περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t + P)$ για κάθε t .
- Μια P -περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$ -περιοδική, $3P$ -περιοδική ...
- $\cos t$ και $\sin t$ είναι 2π -περιοδική (όπως και οι $\cos kt$ και $\sin kt$ για κάθε ακέραιο k)
- Οι σταθερές συναρτήσεις αποτελούν ακραία παραδείγματα περιοδικών συναρτήσεων

Περιοδικές επεκτάσεις

Επεκτείνουμε περιοδικά $f(t)$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[-L, L]$ (την κάνουμε $2L$ -περιοδική συνάρτηση) ορίζοντας μια νέα συνάρτηση $F(t)$ τέτοια ώστε

- Για t στο $[-L, L]$, $F(t) = f(t)$
- Για t στο $[L, 3L]$, $F(t) = f(t - 2L)$
- Για t στο $[-3L, -L]$, $F(t) = f(t + 2L)$
- ...

Περιοδικές επεκτάσεις

Επεκτείνουμε περιοδικά $f(t)$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[-L, L]$ (την κάνουμε $2L$ -περιοδική συνάρτηση) ορίζοντας μια νέα συνάρτηση $F(t)$ τέτοια ώστε

- Για t στο $[-L, L]$, $F(t) = f(t)$
- Για t στο $[L, 3L]$, $F(t) = f(t - 2L)$
- Για t στο $[-3L, -L]$, $F(t) = f(t + 2L)$
- ...

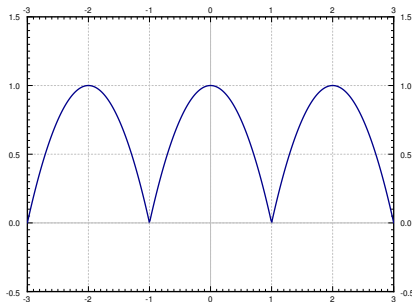
Παράδειγμα: $f(t) = 1 - t^2$, $t \in [-1, 1]$

Περιοδικές επεκτάσεις

Επεκτείνουμε περιοδικά $f(t)$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[-L, L]$ (την κάνουμε $2L$ -περιοδική συνάρτηση) ορίζοντας μια νέα συνάρτηση $F(t)$ τέτοια ώστε

- Για t στο $[-L, L]$, $F(t) = f(t)$
- Για t στο $[L, 3L]$, $F(t) = f(t - 2L)$
- Για t στο $[-3L, -L]$, $F(t) = f(t + 2L)$
- ...

Παράδειγμα: $f(t) = 1 - t^2$, $t \in [-1, 1]$



Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των

$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0.$$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των

$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0.$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} = \frac{2(1) + 3(-1)}{1(1) + (-1)(-1)} = \frac{-1}{2}.$$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των

$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0.$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} = \frac{2(1) + 3(-1)}{1(1) + (-1)(-1)} = \frac{-1}{2}.$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} = \frac{2 + 3}{1 + 1} = \frac{5}{2}.$$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των

$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0.$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} = \frac{2(1) + 3(-1)}{1(1) + (-1)(-1)} = \frac{-1}{2}.$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} = \frac{2 + 3}{1 + 1} = \frac{5}{2}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ορισμοί

Σειρά Fourier του $f(t)$

Ορισμοί

Σειρά *Fourier* του $f(t)$

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Ορισμοί

Σειρά Fourier του $f(t)$

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων

Ορισμοί

Σειρά Fourier του $f(t)$

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων

$$\langle f(t), g(t) \rangle \stackrel{\text{ορισμός}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt.$$

Ανάπτυγμα *Fourier* της $f(x)$

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Ανάπτυγμα *Fourier* της $f(x)$

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

όπου

$$\alpha_n = \frac{\langle f(t), \cos nt \rangle}{\langle \cos nt, \cos nt \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt,$$

$$b_n = \frac{\langle f(t), \sin nt \rangle}{\langle \sin nt, \sin nt \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = t$$

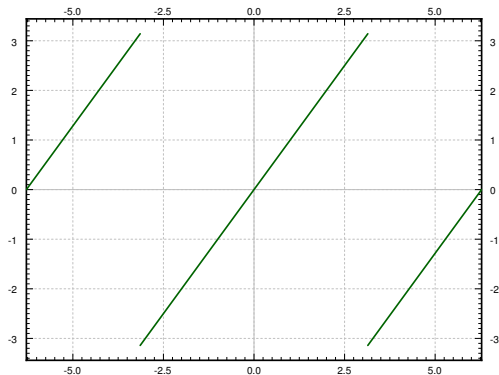
για t στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Επεκτείνετε περιοδικά την $f(t)$ και γράψτε την σε μορφή σειράς *Fourier*.

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = t$$

για t στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Επεκτείνετε περιοδικά την $f(t)$ και γράψτε την σε μορφή σειράς *Fourier*.



Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos mt \, dt = 0.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos mt \, dt = 0.$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin mt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin mt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{-t \cos mt}{m} \right]_{t=0}^{\pi} + \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \cos mt \, dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\pi \cos m\pi}{m} + 0 \right) = \frac{-2 \cos m\pi}{m} = \frac{2(-1)^{m+1}}{m}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos mt \, dt = 0.$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin mt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin mt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\pi \cos m\pi}{m} + 0 \right) = \frac{-2 \cos m\pi}{m} = \frac{2(-1)^{m+1}}{m}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos mt \, dt = 0.$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin mt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin mt \, dt$$

$$\frac{2(-1)^{m+1}}{m}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos mt \, dt = 0.$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin mt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin mt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{-t \cos mt}{m} \right]_{t=0}^{\pi} + \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \cos mt \, dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\pi \cos m\pi}{m} + 0 \right) = \frac{-2 \cos m\pi}{m} = \frac{2(-1)^{m+1}}{m}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

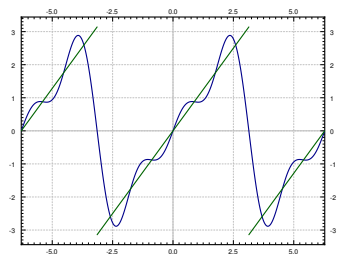
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt =$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt = 2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t + \dots$$

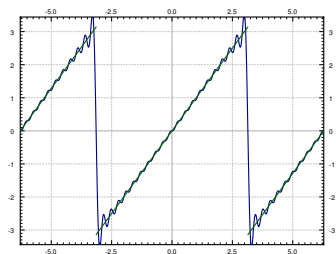
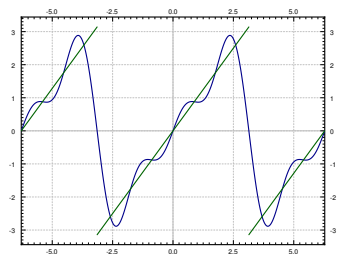
Παράδειγμα (συνέχεια)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt = 2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t + \dots$$



Παράδειγμα (συνέχεια)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nt = 2 \sin t - \sin 2t + \frac{2}{3} \sin 3t + \dots$$

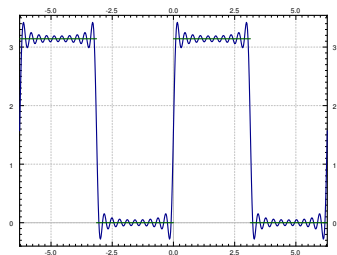
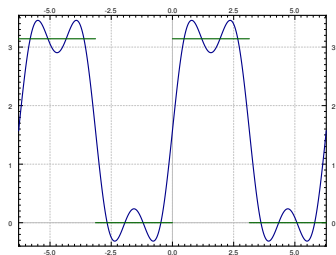


Παράδειγμα

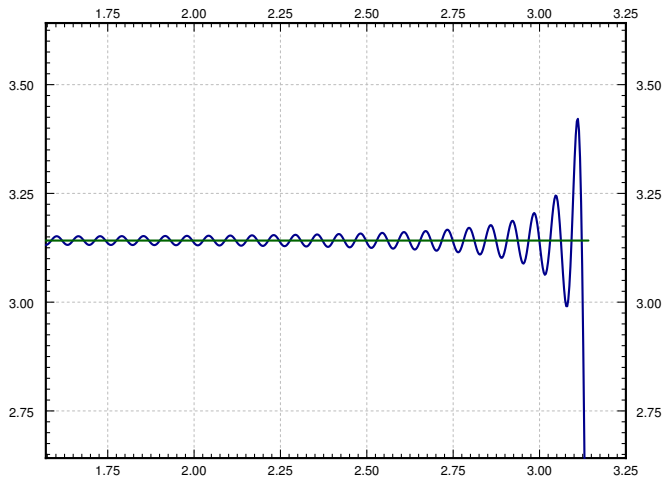
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } -\pi < t \leq 0, \\ \pi & \text{αν } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } -\pi < t \leq 0, \\ \pi & \text{αν } 0 < t \leq \pi. \end{cases} = \frac{\pi}{2} + 2 \sin t + \frac{2}{3} \sin 3t + \dots$$



φαινόμενο του Gibbs



2L-περιοδικές συναρτήσεις

Αν η $f(t)$ είναι 2L-περιοδική, ο μετασχηματισμός $s = \frac{\pi}{L} t$ μας δίνει την 2π-περιοδική

$$g(s) = f\left(\frac{L}{\pi} s\right)$$

με ανάπτυγμα

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t.$$

Εάν αλλάξουμε την μεταβλητή t σε s βλέπουμε ότι

$$g(s) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos ns + b_n \sin ns.$$

2L-περιοδικές συναρτήσεις (συνέχεια)

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) ds = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \cos ns ds = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \sin ns ds = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt \\ &= 2 \left[\frac{t}{n\pi} \sin n\pi t \right]_{t=0}^1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t \, dt \\ &= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2} \left[\cos n\pi t \right]_{t=0}^1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 |t| \, dt = 1, \quad b_n = \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t \, dt = 0.$$

Άρα

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos n\pi t.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\alpha_n = 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt$$

$$= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2} [\cos n\pi t]_{t=0}^1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 |t| \, dt = 1, \quad b_n = \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t \, dt = 0.$$

Άρα

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos n\pi t.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\alpha_n = 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt$$

$$\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 |t| \, dt = 1, \quad b_n = \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t \, dt = 0.$$

Άρα

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos n\pi t.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\alpha_n = 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt$$

$$\begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 |t| \, dt = 1, \quad b_n = \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t \, dt = 0.$$

Άρα

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos n\pi t.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt \\
 &= 2 \left[\frac{t}{n\pi} \sin n\pi t \right]_{t=0}^1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t \, dt \\
 &= 0 + \frac{1}{n^2 \pi^2} \left[\cos n\pi t \right]_{t=0}^1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2 \pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt \\ &= 2 \left[\frac{t}{n\pi} \sin n\pi t \right]_{t=0}^1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t \, dt \\ &= 0 + \frac{1}{n^2 \pi^2} \left[\cos n\pi t \right]_{t=0}^1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2 \pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 |t| \, dt = 1, \quad b_n = \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t \, dt = 0.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt \\ &= 2 \left[\frac{t}{n\pi} \sin n\pi t \right]_{t=0}^1 - 2 \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin n\pi t \, dt \\ &= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2} [\cos n\pi t]_{t=0}^1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 |t| \, dt = 1, \quad b_n = \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t \, dt = 0.$$

Άρα

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos n\pi t.$$

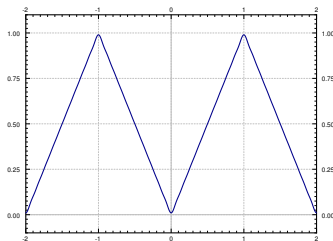
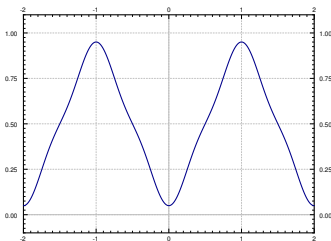
Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$ (συνέχεια)

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$ (συνέχεια)

$$f(t) \approx \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi t - \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi t - \dots$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$ (συνέχεια)

$$f(t) \approx \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi t - \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi t - \dots$$



Περιττές και άρτιες περιοδικές συναρτήσεις

Αν $f(t)$ ορισμένη στο $[0, L]$ τότε

$$F_{\text{περιττή}}(t) \stackrel{\text{ορισμός}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \leq t \leq L, \\ -f(-t) & \text{αν } -L < t < 0, \end{cases}$$

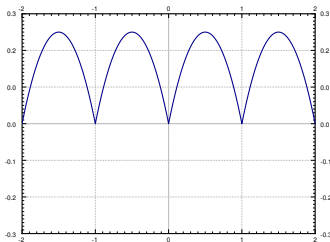
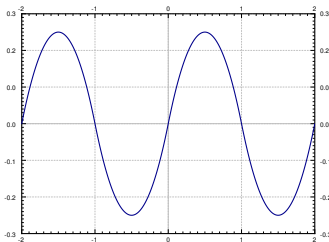
$$F_{\text{άρτια}}(t) \stackrel{\text{ορισμός}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \leq t \leq L, \\ f(-t) & \text{αν } -L < t < 0. \end{cases}$$

Περιττές και άρτιες περιοδικές συναρτήσεις

Αν $f(t)$ ορισμένη στο $[0, L]$ τότε

$$F_{\text{περιττή}}(t) \stackrel{\text{ορισμός}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \leq t \leq L, \\ -f(-t) & \text{αν } -L < t < 0, \end{cases}$$

$$F_{\text{άρτια}}(t) \stackrel{\text{ορισμός}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \leq t \leq L, \\ f(-t) & \text{αν } -L < t < 0. \end{cases}$$



Σχήμα : Περιττή και άρτια 2-περιοδική επέκταση της $f(t) = t(1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Σειρές *Fourier* άρτιων και περιττών επεκτάσεων

Θεώρημα $f(t)$ μια τμηματικά συνεχής στο $[0, L]$ τότε η περιττή της επέκταση έχει το εξής ανάπτυγμα.

$$F_{\text{περιττή}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} t,$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt.$$

Η άρτια επέκταση της $f(t)$ έχει το εξής ανάπτυγμα

$$F_{\text{άρτια}}(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi}{L} t,$$

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt.$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t, \quad c_n = 2 \int_0^1 t \sin n\pi t \, dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t, \quad c_n = 2 \int_0^1 t \sin n\pi t \, dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t, \quad c_n = 2 \int_0^1 t \sin n\pi t \, dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

$$\begin{aligned} x''(t) + 2x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -b_n n^2 \pi^2 \sin n\pi t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (2 - n^2 \pi^2) \sin n\pi t. \end{aligned}$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t, \quad c_n = 2 \int_0^1 t \sin n\pi t \, dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

$$\begin{aligned} x''(t) + 2x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -b_n n^2 \pi^2 \sin n\pi t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (2 - n^2 \pi^2) \sin n\pi t. \end{aligned}$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi(2 - n^2 \pi^2)} \sin n\pi t.$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$$

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$$

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

$$c_0 = 2 \int_0^1 t \, dt = 1,$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$$

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

$$c_0 = 2 \int_0^1 t \, dt = 1,$$

$$c_n = 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 n^2} & n \text{ περιττό,} \\ 0 & n \text{ άρτιο.} \end{cases}$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$$

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

$$c_0 = 2 \int_0^1 t \, dt = 1,$$

$$c_n = 2 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 n^2} & n \text{ περιττό,} \\ 0 & n \text{ άρτιο.} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t.$$

Παράδειγμα (συνέχεια):

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$$

$$\begin{aligned} x''(t) + 2x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\alpha_n n^2 \pi^2 \cos n\pi t \right] + \alpha_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos n\pi t \right] \\ &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (2 - n^2 \pi^2) \cos n\pi t \\ &= f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{-2}{\pi^2 n^2} \cos n\pi t. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια):

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$$

$$x''(t) + 2x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\alpha_n n^2 \pi^2 \cos n\pi t \right] + \alpha_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos n\pi t \right]$$

$$= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (2 - n^2 \pi^2) \cos n\pi t$$

$$= f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{-2}{\pi^2 n^2} \cos n\pi t.$$

$$x(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{-4}{n^2 \pi^2 (2 - n^2 \pi^2)} \cos n\pi t.$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + x_{sp}$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + x_{sp}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi}{L} t + d_n \sin \frac{n\pi}{L} t$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + x_{sp}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi}{L} t + d_n \sin \frac{n\pi}{L} t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + x_{sp}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi}{L} t + d_n \sin \frac{n\pi}{L} t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t$$

Αντικαθιστούμε το x στην εξίσωση και υπολογίζουμε τα α_n και b_n συναρτήσει των c_n και d_n .

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

$$c_n = \int_{-1}^1 F(t) \cos n\pi t \, dt = 0$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

$$c_n = \int_{-1}^1 F(t) \cos n\pi t \, dt = 0 \quad c_0 = \int_{-1}^1 F(t) \, dt = 1$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

$$c_n = \int_{-1}^1 F(t) \cos n\pi t \, dt = 0 \quad c_0 = \int_{-1}^1 F(t) \, dt = 1$$

$$d_n = \int_{-1}^1 F(t) \sin n\pi t \, dt$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

$$c_n = \int_{-1}^1 F(t) \cos n\pi t \, dt = 0 \quad c_0 = \int_{-1}^1 F(t) \, dt = 1$$

$$d_n = \int_{-1}^1 F(t) \sin n\pi t \, dt = \left[\frac{-\cos n\pi t}{n\pi} \right]_{t=0}^1$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

$$c_n = \int_{-1}^1 F(t) \cos n\pi t \, dt = 0 \quad c_0 = \int_{-1}^1 F(t) \, dt = 1$$

$$d_n = \int_{-1}^1 F(t) \sin n\pi t \, dt = \left[\frac{-\cos n\pi t}{n\pi} \right]_{t=0}^1 = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & n \text{ π} \\ 0 & n \text{ δ} \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} b_n \sin n\pi t$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} b_n \sin n\pi t$$

$$x'' + 2x = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[-b_n n^2 \pi^2 \sin n\pi t \right] + \alpha_0 + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[b_n \sin n\pi t \right]$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} b_n \sin n\pi t$$

$$x'' + 2x = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[-b_n n^2 \pi^2 \sin n\pi t \right] + \alpha_0 + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[b_n \sin n\pi t \right]$$

$$= \alpha_0 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} b_n (2 - n^2 \pi^2) \sin n\pi t = F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$x_{sp}(t) = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n(2 - n^2\pi^2)} \sin n\pi t.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$x_{sp}(t) = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n(2 - n^2\pi^2)} \sin n\pi t.$$

