

Διαφορικές Εξισώσεις

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, Ιδιοτιμές με πολλαπλότητα, Ατελείς ιδιοτιμές Εκθετικά πινάκων

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

28 Μαρτίου 2015, Βόλος

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t. \quad (1)$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F} \cos \omega t. \quad (1)$$

Μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t,$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F} \cos \omega t. \quad (1)$$

Μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t,$$

$$\vec{x}_p'' = -\omega^2 \vec{c} \cos \omega t.$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F} \cos \omega t. \quad (1)$$

Μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t,$$

$$\vec{x}_p'' = -\omega^2 \vec{c} \cos \omega t.$$

$$-\omega^2 \vec{c} \cos \omega t = A\vec{c} \cos \omega t + \vec{F} \cos \omega t$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F} \cos \omega t. \quad (1)$$

Μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t,$$

$$\vec{x}_p'' = -\omega^2 \vec{c} \cos \omega t.$$

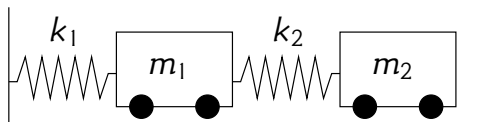
$$-\omega^2 \vec{c} \cos \omega t = A\vec{c} \cos \omega t + \vec{F} \cos \omega t$$

$$(A + \omega^2 I)\vec{c} = -\vec{F}.$$

Οπότε

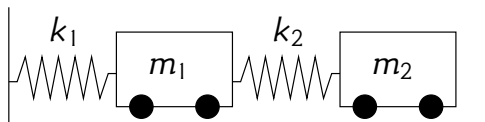
$$\vec{c} = (A + \omega^2 I)^{-1}(-\vec{F}).$$

Παράδειγμα



$$m_1 = 2, m_2 = 1, k_1 = 4, \text{ και } k_2 = 2$$

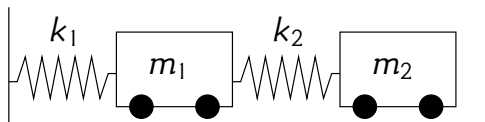
Παράδειγμα



$$m_1 = 2, m_2 = 1, k_1 = 4, \text{ και } k_2 = 2$$

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Παράδειγμα

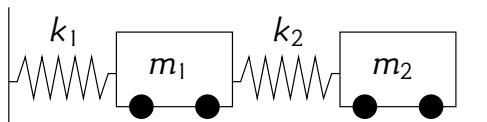


$$m_1 = 2, m_2 = 1, k_1 = 4, \text{ και } k_2 = 2$$

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t).$$

Παράδειγμα



$$m_1 = 2, m_2 = 1, k_1 = 4, \text{ και } k_2 = 2$$

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t).$$

$$(A + \omega^2 I) \vec{c} = -\vec{F}$$

Δηλαδή

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3^2 I \right) \vec{c} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{-3}{10} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα (η λύση)

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F} \cos \omega t$$

Παράδειγμα (η λύση)

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F} \cos \omega t$$

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p =$$

Παράδειγμα (η λύση)

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F} \cos \omega t$$

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{-3}{10} \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

- αλγεβρική πολλαπλότητα 2

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

- αλγεβρική πολλαπλότητα 2
- γεωμετρική πολλαπλότητα 2 επειδή υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

- αλγεβρική πολλαπλότητα 2
- γεωμετρική πολλαπλότητα 2 επειδή υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής (τα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$).

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

- αλγεβρική πολλαπλότητα 2
- γεωμετρική πολλαπλότητα 2 επειδή υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής (τα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$).

Το $\vec{x}' = A\vec{x}$ έχει την εξής γενική λύση

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές $(-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \dots > -\omega_n^2)$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_i > 0$), τότε

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i (\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές $(-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \dots > -\omega_n^2)$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i (\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Αν ο A έχει μια μηδενική ιδιοτιμή, ($\omega_1 = 0$), ενώ όλες οι άλλες ιδιοτιμές είναι αρνητικές και διαφορετικές μεταξύ τους τότε η γενική λύση είναι

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 (\alpha_1 + b_1 t) + \sum_{i=2}^n \vec{v}_i (\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t).$$

Θεώρημα - Λύσεις με πολλαπλότητα

Έστω $\vec{x}' = P\vec{x}$. Αν P είναι ένα $n \times n$ πίνακας ο οποίος έχει τις εξής n πραγματικές ιδιοτιμές (οι οποίες δεν είναι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους), $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, και αν σε αυτές αντιστοιχούν τα εξής n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, τότε η γενική λύση του συστήματος ΣΔΕ μπορεί να γραφθεί ως εξής

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n t}.$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές $(-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \dots > -\omega_n^2)$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_i > 0$), τότε

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i (\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές $(-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \dots > -\omega_n^2)$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i (\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Αν ο A έχει μια μηδενική ιδιοτιμή, ($\omega_1 = 0$), ενώ όλες οι άλλες ιδιοτιμές είναι αρνητικές και διαφορετικές μεταξύ τους τότε η γενική λύση είναι

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 (\alpha_1 + b_1 t) + \sum_{i=2}^n \vec{v}_i (\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t).$$

Ατελείς ιδιοτιμές

ατελής ιδιοτιμή κάθε ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από την γεωμετρική.

Ατελείς ιδιοτιμές

ατελής ιδιοτιμή κάθε ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από την γεωμετρική.
Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ατελείς ιδιοτιμές

ατελής ιδιοτιμή κάθε ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από την γεωμετρική.
Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Ατελείς ιδιοτιμές

ατελής ιδιοτιμή κάθε ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από την γεωμετρική.
Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1) e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1) e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1) e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = A\vec{v}_2 \text{ και } 3\vec{v}_1 = A\vec{v}_1.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1) e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = A\vec{v}_2 \text{ και } 3\vec{v}_1 = A\vec{v}_1.$$

$$(A - 3I)\vec{v}_1 = \vec{0}, \quad \text{και} \quad (A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1) e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = A\vec{v}_2 \text{ και } 3\vec{v}_1 = A\vec{v}_1.$$

$$(A - 3I)\vec{v}_1 = \vec{0}, \quad \text{και} \quad (A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

$$(A - 3I)(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{0}, \quad \text{ή} \quad (A - 3I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Παράδειγμα

$(A - 3I)^2 = 0$. Το κάθε \vec{v}_2 είναι λύση του
 $(A - 3I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$. 'ρα αρκεί $(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

Παράδειγμα

$(A - 3I)^2 = 0$. Το κάθε \vec{v}_2 είναι λύση του
 $(A - 3I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$. 'ρα αρκεί $(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$(A - 3I)^2 = 0$. Το κάθε \vec{v}_2 είναι λύση του $(A - 3I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$. 'ρα αρκεί $(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω $\alpha = 0$ $b = 1$. 'ρα $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα

$(A - 3I)^2 = 0$. Το κάθε \vec{v}_2 είναι λύση του $(A - 3I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0}$. 'ρα αρκεί $(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω $\alpha = 0$ $b = 1$. 'ρα $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
 Η γενική λύση του $\vec{x}' = A\vec{x}$ είναι

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \right) e^{3t} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \\ c_2 e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας 2 ατέλειας 1

Βρες το ιδιοδιάνυσμα \vec{v}_1 του λ .

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας 2 ατέλειας 1

Βρες το ιδιοδιάνυσμα \vec{v}_1 του λ . Μετά πρέπει να βρούμε ένα \vec{v}_2 τέτοιο ώστε

$$(A - 3I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0},$$
$$(A - 3I) \vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας 2 ατέλειας 1

Βρες το ιδιοδιάνυσμα \vec{v}_1 του λ . Μετά πρέπει να βρούμε ένα \vec{v}_2 τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}(A - 3I)^2 \vec{v}_2 &= \vec{0}, \\ (A - 3I) \vec{v}_2 &= \vec{v}_1.\end{aligned}$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{v}_1 e^{\lambda t}, \\ \vec{x}_2 &= (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας m

Βρες τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$$(A - \lambda I)^k \vec{v} = \vec{0}, \quad \text{αλλά} \quad (A - \lambda I)^{k-1} \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας m

Βρες τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$$(A - \lambda I)^k \vec{v} = \vec{0}, \quad \text{αλλά} \quad (A - \lambda I)^{k-1} \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Για κάθε ιδιοδιάνυσμα \vec{v}_1 βρες μια σειρά γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων $\vec{v}_2 \dots \vec{v}_k$ τέτοια ώστε:

$$(A - \lambda I)\vec{v}_1 = \vec{0},$$

$$(A - \lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1,$$

$$\vdots$$

$$(A - \lambda I)\vec{v}_k = \vec{v}_{k-1}.$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας m

Βρες τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$$(A - \lambda I)^k \vec{v} = \vec{0}, \quad \text{αλλά} \quad (A - \lambda I)^{k-1} \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Για κάθε ιδιοδιάνυσμα \vec{v}_1 βρες μια σειρά γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων $\vec{v}_2 \dots \vec{v}_k$ τέτοια ώστε:

$$(A - \lambda I)\vec{v}_1 = \vec{0},$$

$$(A - \lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1,$$

$$\vdots$$

$$(A - \lambda I)\vec{v}_k = \vec{v}_{k-1}.$$

Οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda t},$$

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{\lambda t},$$

$$\vdots$$

Εκθετικά

μαντεψιά

$$\vec{x}' = P\vec{x},$$

$$\vec{x} = e^{Pt}.$$

Εκθετικά

$$\vec{x}' = P\vec{x},$$

μαντεψιά

$$\vec{x} = e^{Pt}.$$

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} + \frac{(\alpha t)^3}{6} + \frac{(\alpha t)^4}{24} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!}.$$

Εκθετικά

$$\vec{x}' = P\vec{x},$$

μαντεψιά

$$\vec{x} = e^{Pt}.$$

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} + \frac{(\alpha t)^3}{6} + \frac{(\alpha t)^4}{24} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!}.$$

$$\alpha + \alpha^2 t + \frac{\alpha^3 t^2}{2} + \frac{\alpha^4 t^3}{6} + \dots = \alpha \left(1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} + \frac{(\alpha t)^3}{6} + \dots \right) = \alpha e^{\alpha t}$$

Εκθετικά Πινάκων

$$e^{A \text{ ορισμός}} \equiv I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots$$

Εκθετικά Πινάκων

$$e^A \stackrel{\text{ορισμός}}{=} I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots$$

$$\frac{d}{dt} (e^{tP}) = Pe^{tP}.$$

Θεώρημα

Εάν P είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε η γενική λύση του $\vec{x}' = P\vec{x}$ είναι

$$\vec{x} = e^{tP}\vec{c},$$

όπου \vec{c} είναι ένα οποιοδήποτε σταθερό διάνυσμα. Μάλιστα ισχύει η σχέση $\vec{x}(0) = \vec{c}$.

Πρόβλημα

Εάν $AB = BA$ τότε $e^{A+B} = e^A e^B$. Ειδιάλλως έχουμε $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Απλές περιπτώσεις

Διαγώνιοι πίνακες

Πίνακες τ.ω. $A^k = 0$ για $k > 2$.

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}.$$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}.$$

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \dots$$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}.$$

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \dots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix} + \dots$$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}.$$

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \dots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix} + \dots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}.$$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}.$$

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \dots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix} + \dots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}.$$

και παρεμπιπτόντως

$$e^I = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad e^{aI} = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{bmatrix}.$$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$$

Οι tB και $2tI$ αντιμετωπίζονται, άρα

$$e^{tA} = e^{tB+2tI}$$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$$

Οι tB και $2tI$ αντιμετωπίζονται, άρα

$$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} =$$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$$

Οι tB και $2tI$ αντιμετωπίζονται, άρα

$$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} = e^{tB} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$$

Οι tB και $2tI$ αντιμετωπίζονται, άρα

$$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} = e^{tB} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Όμως } B^2 = 0$$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

$$\text{Έστω } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$$

Οι tB και $2tI$ αντιμετωπίζονται, άρα

$$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} = e^{tB} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Όμως } B^2 = 0 \Rightarrow B^k = 0 \quad \forall k \geq 2$$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$

Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} = e^{tB} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Όμως $B^2 = 0 \Rightarrow B^k = 0 \quad \forall k \geq 2$ άρα

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 3t & -3t \\ 3t & 1 - 3t \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1 + 3t)e^{2t} & -3te^{2t} \\ 3te^{2t} & (1 - 3t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Γενική περίπτωση

Βασικό εργαλείο

$$e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1}$$

Γενική περίπτωση

Βασικό εργαλείο

$$e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1} \Rightarrow (BAB^{-1})^k = BA^k B^{-1}.$$

Γενική περίπτωση

Βασικό εργαλείο

$$e^{BAB^{-1}} = Be^AB^{-1} \Rightarrow (BAB^{-1})^k = BA^k B^{-1}.$$

$$\begin{aligned} e^{BAB^{-1}} &= I + BAB^{-1} + \frac{1}{2}(BAB^{-1})^2 + \frac{1}{6}(BAB^{-1})^3 + \dots \\ &= BB^{-1} + BAB^{-1} + \frac{1}{2}BA^2B^{-1} + \frac{1}{6}BA^3B^{-1} + \dots \\ &= B(I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots)B^{-1} \\ &= Be^AB^{-1}. \end{aligned}$$

Η λύση με εκθετικά

Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές και $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ τα (γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του A .

Η λύση με εκθετικά

Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές και $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ τα (γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του A .
Έστω E ο πίνακας ο οποίος έχει σαν στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A .

Η λύση με εκθετικά

Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές και $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ τα (γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του A .

Έστω E ο πίνακας ο οποίος έχει σαν στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A .

Τότε

$$e^{tA} = Ee^{tD}E^{-1} = E \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} E^{-1}.$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x(0) = 4 \quad y(0) = 2.$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x(0) = 4 \quad y(0) = 2.$$

Ιδιοτιμές: 3 και -1 , ιδιοδιανύσματα: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x(0) = 4 \quad y(0) = 2.$$

Ιδιοτιμές: 3 και -1 , ιδιοδιανύσματα: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -e^{3t} - e^{-t} & -e^{3t} + e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x(0) = 4 \quad y(0) = 2.$$

Ιδιοτιμές: 3 και -1 , ιδιοδιανύσματα: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -e^{3t} - e^{-t} & -e^{3t} + e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{3t} + e^{-t} \\ 3e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

$$e^{tP}\vec{x}'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

$$e^{tP}\vec{x}'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$ και $\frac{d}{dt}(e^{tP}) = Pe^{tP}$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \Rightarrow \vec{x}'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

$$e^{tP}\vec{x}'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$ και $\frac{d}{dt}(e^{tP}) = Pe^{tP}$ άρα

$$\frac{d}{dt}(e^{tP}\vec{x}(t)) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \Rightarrow \vec{x}'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

$$e^{tP}\vec{x}'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$ και $\frac{d}{dt}(e^{tP}) = Pe^{tP}$ άρα

$$\frac{d}{dt}(e^{tP}\vec{x}(t)) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

$$e^{tP}\vec{x}(t) = \int e^{tP}\vec{f}(t) dt + \vec{c}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

$$e^{tP}\vec{x}'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$ και $\frac{d}{dt}(e^{tP}) = Pe^{tP}$ άρα

$$\frac{d}{dt}(e^{tP}\vec{x}(t)) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

$$e^{tP}\vec{x}(t) = \int e^{tP}\vec{f}(t) dt + \vec{c}.$$

$$\vec{x}(t) = e^{-tP} \int e^{tP}\vec{f}(t) dt + e^{-tP}\vec{c}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{b}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{b}.$$

$$\vec{x}(t) = e^{-tP} \int_0^t e^{sP} \vec{f}(s) ds + e^{-tP} \vec{b}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{b}.$$

$$\vec{x}(t) = e^{-tP} \int_0^t e^{sP} \vec{f}(s) ds + e^{-tP} \vec{b}.$$

$$\vec{x}(0) = e^{-0P} \int_0^0 e^{sP} \vec{f}(s) ds + e^{-0P} \vec{b} = I\vec{b} = \vec{b}.$$

Παράδειγμα

$$x_1' + 5x_1 - 3x_2 = e^t,$$

$$x_2' + 3x_1 - x_2 = 0, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$$

Παράδειγμα

$$x_1' + 5x_1 - 3x_2 = e^t,$$

$$x_2' + 3x_1 - x_2 = 0, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$$

$$\vec{x}' + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned}x_1' + 5x_1 - 3x_2 &= e^t, \\x_2' + 3x_1 - x_2 &= 0, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0\end{aligned}$$

$$\vec{x}' + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$e^{tP} = \begin{bmatrix} (1 + 3t)e^{2t} & -3te^{2t} \\ 3te^{2t} & (1 - 3t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$x_1' + 5x_1 - 3x_2 = e^t,$$

$$x_2' + 3x_1 - x_2 = 0, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0$$

$$\vec{x}' + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$e^{tP} = \begin{bmatrix} (1 + 3t)e^{2t} & -3te^{2t} \\ 3te^{2t} & (1 - 3t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{sP} \vec{f}(s) ds &= \int_0^t \begin{bmatrix} (1 + 3s)e^{2s} & -3se^{2s} \\ 3se^{2s} & (1 - 3s)e^{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} (1 + 3s)e^{3s} \\ 3se^{3s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} te^{3t} \\ \frac{(3t-1)e^{3t}+1}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\begin{aligned}
 \vec{x}(t) &= e^{-tP} \int_0^t e^{sP} \vec{f}(s) ds + e^{-tP} \vec{b} \\
 &= \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-2t} & 3te^{-2t} \\ -3te^{-2t} & (1+3t)e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{3t} \\ \frac{(3t-1)e^{3t}+1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} te^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3} + t\right) e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (1-2t)e^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3} - 2t\right) e^{-2t} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\vec{x}(t) = e^{-tP} \int_0^t e^{sP} \vec{f}(s) ds + e^{-tP} \vec{b}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - 2t)e^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3} - 2t\right) e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\begin{aligned}
 \vec{x}(t) &= e^{-tP} \int_0^t e^{sP} \vec{f}(s) ds + e^{-tP} \vec{b} \\
 &= \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-2t} & 3te^{-2t} \\ -3te^{-2t} & (1+3t)e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{3t} \\ \frac{(3t-1)e^{3t}+1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} te^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3} + t\right) e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (1-2t)e^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3} - 2t\right) e^{-2t} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad . \quad (2)$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad . \quad (2)$$

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A .

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad . \quad (2)$$

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A .

Έστω

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 \xi_1(t) + \vec{v}_2 \xi_2(t) + \dots + \vec{v}_n \xi_n(t). \quad (3)$$

και

$$\vec{f}(t) = \vec{v}_1 g_1(t) + \vec{v}_2 g_2(t) + \dots + \vec{v}_n g_n(t). \quad (4)$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad . \quad (2)$$

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A .
Έστω

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 \xi_1(t) + \vec{v}_2 \xi_2(t) + \dots + \vec{v}_n \xi_n(t). \quad (3)$$

και

$$\vec{f}(t) = \vec{v}_1 g_1(t) + \vec{v}_2 g_2(t) + \dots + \vec{v}_n g_n(t). \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{v}_1 \xi_1' + \vec{v}_2 \xi_2' + \dots + \vec{v}_n \xi_n' \\ &= A(\vec{v}_1 \xi_1 + \vec{v}_2 \xi_2 + \dots + \vec{v}_n \xi_n) + \vec{v}_1 g_1 + \vec{v}_2 g_2 + \dots + \vec{v}_n g_n \\ &= A\vec{v}_1 \xi_1 + A\vec{v}_2 \xi_2 + \dots + A\vec{v}_n \xi_n + \vec{v}_1 g_1 + \vec{v}_2 g_2 + \dots + \vec{v}_n g_n \\ &= \vec{v}_1 \lambda_1 \xi_1 + \vec{v}_2 \lambda_2 \xi_2 + \dots + \vec{v}_n \lambda_n \xi_n + \vec{v}_1 g_1 + \vec{v}_2 g_2 + \dots + \vec{v}_n g_n \\ &= \vec{v}_1 (\lambda_1 \xi_1 + g_1) + \vec{v}_2 (\lambda_2 \xi_2 + g_2) + \dots + \vec{v}_n (\lambda_n \xi_n + g_n). \end{aligned}$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\xi'_1 = \lambda_1 \xi_1 + g_1,$$

$$\xi'_2 = \lambda_2 \xi_2 + g_2,$$

$$\vdots$$

$$\xi'_n = \lambda_n \xi_n + g_n.$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\xi'_1 = \lambda_1 \xi_1 + g_1,$$

$$\xi'_2 = \lambda_2 \xi_2 + g_2,$$

$$\vdots$$

$$\xi'_n = \lambda_n \xi_n + g_n.$$

$$\xi'_k(t) - \lambda_k \xi_k(t) = g_k(t).$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\xi_1' = \lambda_1 \xi_1 + g_1,$$

$$\xi_2' = \lambda_2 \xi_2 + g_2,$$

$$\vdots$$

$$\xi_n' = \lambda_n \xi_n + g_n.$$

$$\xi_k'(t) - \lambda_k \xi_k(t) = g_k(t).$$

$$\frac{d}{dx} \left[\xi_k(t) e^{-\lambda_k t} \right] = e^{-\lambda_k t} g_k(t).$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\xi_1' = \lambda_1 \xi_1 + g_1,$$

$$\xi_2' = \lambda_2 \xi_2 + g_2,$$

$$\vdots$$

$$\xi_n' = \lambda_n \xi_n + g_n.$$

$$\xi_k'(t) - \lambda_k \xi_k(t) = g_k(t).$$

$$\frac{d}{dx} \left[\xi_k(t) e^{-\lambda_k t} \right] = e^{-\lambda_k t} g_k(t).$$

$$\xi_k(t) = e^{\lambda_k t} \int e^{-\lambda_k t} g_k(t) dt + C_k e^{\lambda_k t}.$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\xi_k(t) = e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} g_k(s) dt + \alpha_k e^{\lambda_k t},$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\xi_k(t) = e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} g_k(s) dt + \alpha_k e^{\lambda_k t},$$

$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 \xi_1(t) + \vec{v}_2 \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n \xi_n(t)$ η οποία ικανοποιεί την $\vec{x}(0) = \vec{b}$, επειδή $\xi_k(0) = \alpha_k$.

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f} \quad \text{όπου} \quad \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} \quad \text{για} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f} \quad \text{όπου} \quad \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} \quad \text{για} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}.$$

Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f} \quad \text{όπου} \quad \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} \quad \text{για} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}.$$

Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f} \text{ όπου } \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} \text{ για } \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}.$$

Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xi_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xi_2, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} g_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} g_2 \text{ και}$$

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_2,$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f} \quad \text{όπου} \quad \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} \quad \text{για} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}.$$

Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xi_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xi_2, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} g_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} g_2 \quad \text{και}$$

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_2, \quad \text{όπου}$$

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - t \\ e^t + t \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f} \quad \text{όπου} \quad \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} \quad \text{για} \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}.$$

Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xi_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xi_2, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} g_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} g_2 \quad \text{και}$$

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_2, \quad \text{όπου}$$

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - t \\ e^t + t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/16 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε, εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\xi_1' &= -2\xi_1 + e^t - t, & \text{όπου } \xi_1(0) &= \alpha_1 = \frac{1}{4}, \\ \xi_2' &= 4\xi_2 + e^t + t, & \text{όπου } \xi_2(0) &= \alpha_2 = \frac{-1}{16}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε, εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων και παίρνουμε

$$\xi_1' = -2\xi_1 + e^t - t, \quad \text{όπου } \xi_1(0) = \alpha_1 = \frac{1}{4},$$

$$\xi_2' = 4\xi_2 + e^t + t, \quad \text{όπου } \xi_2(0) = \alpha_2 = \frac{-1}{16}.$$

$$\xi_1 = e^{-2t} \int e^{2t} (e^t - t) dt + C_1 e^{-2t} = \frac{e^t}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + C_1 e^{-2t}.$$

$$\xi_2 = e^{4t} \int e^{-4t} (e^t + t) dt + C_2 e^{4t} = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + C_2 e^{4t}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε, εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων και παίρνουμε

$$\xi_1' = -2\xi_1 + e^t - t, \quad \text{όπου } \xi_1(0) = \alpha_1 = \frac{1}{4},$$

$$\xi_2' = 4\xi_2 + e^t + t, \quad \text{όπου } \xi_2(0) = \alpha_2 = \frac{-1}{16}.$$

$$\xi_1 = e^{-2t} \int e^{2t} (e^t - t) dt + C_1 e^{-2t} = \frac{e^t}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + C_1 e^{-2t}.$$

$$\xi_2 = e^{4t} \int e^{-4t} (e^t + t) dt + C_2 e^{4t} = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + C_2 e^{4t}.$$

Επειδή $\xi_1(0) = 1/4$ και $\xi_2(0) = 1/16$ έχουμε $C_1 = -1/3$ και $C_2 = 1/3$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε, εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων και παίρνουμε

$$\xi_1' = -2\xi_1 + e^t - t, \quad \text{όπου } \xi_1(0) = \alpha_1 = \frac{1}{4},$$

$$\xi_2' = 4\xi_2 + e^t + t, \quad \text{όπου } \xi_2(0) = \alpha_2 = \frac{-1}{16}.$$

$$\xi_1 = e^{-2t} \int e^{2t} (e^t - t) dt + C_1 e^{-2t} = \frac{e^t}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + C_1 e^{-2t}.$$

$$\xi_2 = e^{4t} \int e^{-4t} (e^t + t) dt + C_2 e^{4t} = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + C_2 e^{4t}.$$

Επειδή $\xi_1(0) = 1/4$ και $\xi_2(0) = 1/16$ έχουμε $C_1 = -1/3$ και $C_2 = 1/3$ και η λύση είναι

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{4t} - e^{-2t}}{3} + \frac{3 - 12t}{16} \\ \frac{e^{-2t} + e^{4t} + 2e^t}{3} + \frac{4t - 5}{16} \end{bmatrix}.$$

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}.$$

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}.$$

Ιδιοτιμές $-1, 1$. Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 'ρα

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}.$$

Ιδιοτιμές $-1, 1$. Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 'ρα

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

Μαντεψιά $\vec{x} = \vec{a}e^t + \vec{b}te^t + \vec{c}t + \vec{d}$

όπου $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, και $\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$,

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}.$$

Ιδιοτιμές $-1, 1$. Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 'ρα

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

Μαντεψιά $\vec{x} = \vec{a}e^t + \vec{b}te^t + \vec{c}t + \vec{d}$

όπου $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, και $\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$,

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -b_1 \\ -2b_1 + b_2 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} -c_1 \\ -2c_1 + c_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -d_1 \\ -2d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}.$$

Ιδιοτιμές $-1, 1$. Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 'ρα

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

Μαντεψιά $\vec{x} = \vec{a}e^t + \vec{b}te^t + \vec{c}t + \vec{d}$

όπου $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, και $\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$,

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -b_1 \\ -2b_1 + b_2 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} -c_1 \\ -2c_1 + c_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -d_1 \\ -2d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^t \\ -te^t - t - 1 \end{bmatrix}.$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \quad \vec{x}_p = X(t)\vec{u}(t), \quad (5)$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \quad \vec{x}_p = X(t)\vec{u}(t), \quad (5)$$

$$\vec{x}_p'(t) = X'(t)\vec{u}(t) + X(t)\vec{u}'(t) = A(t)X(t)\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \quad \vec{x}_p = X(t)\vec{u}(t), \quad (5)$$

$$\vec{x}_p'(t) = X'(t)\vec{u}(t) + X(t)\vec{u}'(t) = A(t)X(t)\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

$$X'(t)\vec{u}(t) + X(t)\vec{u}'(t) = X'(t)\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \quad \vec{x}_p = X(t)\vec{u}(t), \quad (5)$$

$$\vec{x}_p'(t) = X'(t)\vec{u}(t) + X(t)\vec{u}'(t) = A(t)X(t)\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

$$X'(t)\vec{u}(t) + X(t)\vec{u}'(t) = X'(t)\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

$$\vec{x}_p = X(t) \int [X(t)]^{-1} \vec{f}(t) dt.$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (t^2 + 1). \quad (6)$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (t^2 + 1). \quad (6)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (t^2 + 1). \quad (6)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \quad [X(t)]^{-1} = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (t^2 + 1). \quad (6)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \quad [X(t)]^{-1} = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_p &= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \int \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (t^2 + 1) dt \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 2t \\ -t^2 + 1 \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ -\frac{1}{3}t^3 + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^4 \\ \frac{2}{3}t^3 + t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (t^2 + 1). \quad (6)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \quad [X(t)]^{-1} = \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{x}_p = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \int \frac{1}{t^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} (t^2 + 1) dt$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 2t \\ -t^2 + 1 \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ -\frac{1}{3}t^3 + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^4 \\ \frac{2}{3}t^3 + t \end{bmatrix}.$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^4 \\ \frac{2}{3}t^3 + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2t + \frac{1}{3}t^4 \\ c_2 + (c_1 + 1)t + \frac{2}{3}t^3 \end{bmatrix}.$$

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,
μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t.$$

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,
μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t.$$

Αν $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega_0 t + \vec{F}_1 \cos \omega_1 t$,

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,
μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t.$$

Αν $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega_0 t + \vec{F}_1 \cos \omega_1 t$,

μαντεψιά $\vec{a} \cos \omega_0 t$ και βρίσκουμε μια λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_0 \cos \omega_0 t,$$

μαντεψιά $\vec{b} \cos \omega_1 t$ και βρίσκουμε μια λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_1 \cos \omega_1 t.$$

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,
μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t.$$

Αν $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega_0 t + \vec{F}_1 \cos \omega_1 t$,

μαντεψιά $\vec{a} \cos \omega_0 t$ και βρίσκουμε μια λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_0 \cos \omega_0 t,$$

μαντεψιά $\vec{b} \cos \omega_1 t$ και βρίσκουμε μια λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_1 \cos \omega_1 t.$$

Προσθέσουμε τις λύσεις.

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ και
 $E = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ και
 $E = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 \xi_1(t) + \vec{v}_2 \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n \xi_n(t).$$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ και
 $E = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 \xi_1(t) + \vec{v}_2 \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n \xi_n(t).$$

$$\vec{F}(t) = \vec{v}_1 g_1(t) + \vec{v}_2 g_2(t) + \cdots + \vec{v}_n g_n(t).$$

οπότε έχουμε $\vec{g} = E^{-1}\vec{F}$.

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ και
 $E = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 \xi_1(t) + \vec{v}_2 \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n \xi_n(t).$$

$$\vec{F}(t) = \vec{v}_1 g_1(t) + \vec{v}_2 g_2(t) + \cdots + \vec{v}_n g_n(t).$$

οπότε έχουμε $\vec{g} = E^{-1}\vec{F}$.

$$\begin{aligned} \vec{x}'' &= \vec{v}_1 \xi_1'' + \vec{v}_2 \xi_2'' + \cdots + \vec{v}_n \xi_n'' \\ &= A(\vec{v}_1 \xi_1 + \vec{v}_2 \xi_2 + \cdots + \vec{v}_n \xi_n) + \vec{v}_1 g_1 + \vec{v}_2 g_2 + \cdots + \vec{v}_n g_n \\ &= A\vec{v}_1 \xi_1 + A\vec{v}_2 \xi_2 + \cdots + A\vec{v}_n \xi_n + \vec{v}_1 g_1 + \vec{v}_2 g_2 + \cdots + \vec{v}_n g_n \\ &= \vec{v}_1 \lambda_1 \xi_1 + \vec{v}_2 \lambda_2 \xi_2 + \cdots + \vec{v}_n \lambda_n \xi_n + \vec{v}_1 g_1 + \vec{v}_2 g_2 + \cdots + \vec{v}_n g_n \\ &= \vec{v}_1 (\lambda_1 \xi_1 + g_1) + \vec{v}_2 (\lambda_2 \xi_2 + g_2) + \cdots + \vec{v}_n (\lambda_n \xi_n + g_n). \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Ιδιοτ. -1 και -4 , ιδιοδ. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$,

$$E^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Ιδιοτ. -1 και -4 , ιδιοδ. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$,

$$E^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \vec{F}(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cos 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cos 3t \\ -\frac{2}{3} \cos 3t \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Ιδιοτ. -1 και -4 , ιδιοδ. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$,
 $E^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \vec{F}(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cos 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cos 3t \\ -\frac{2}{3} \cos 3t \end{bmatrix}.$$

$$\xi_1'' = -\xi_1 + \frac{2}{3} \cos 3t,$$

$$\xi_2'' = -4 \xi_2 - \frac{2}{3} \cos 3t.$$