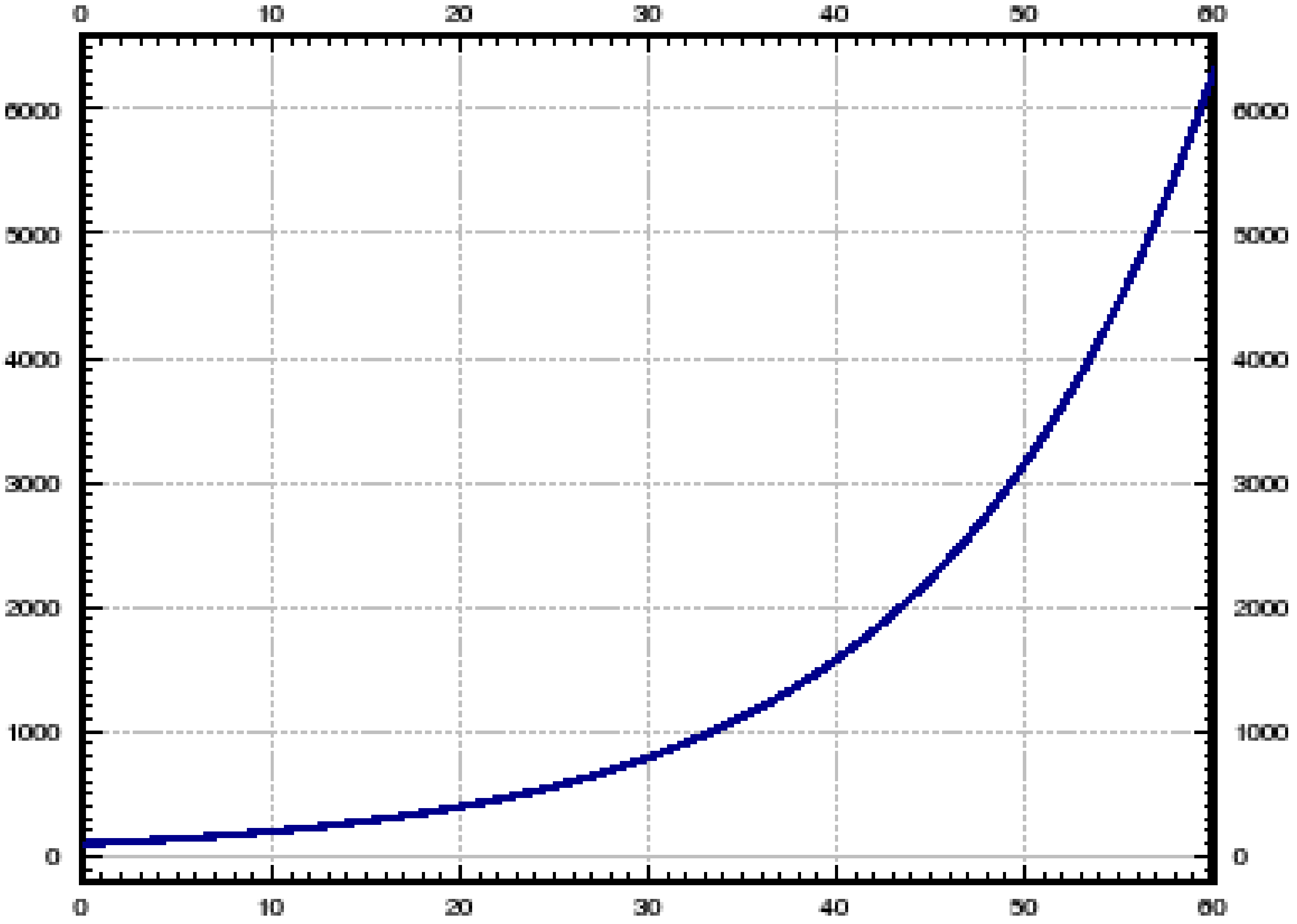
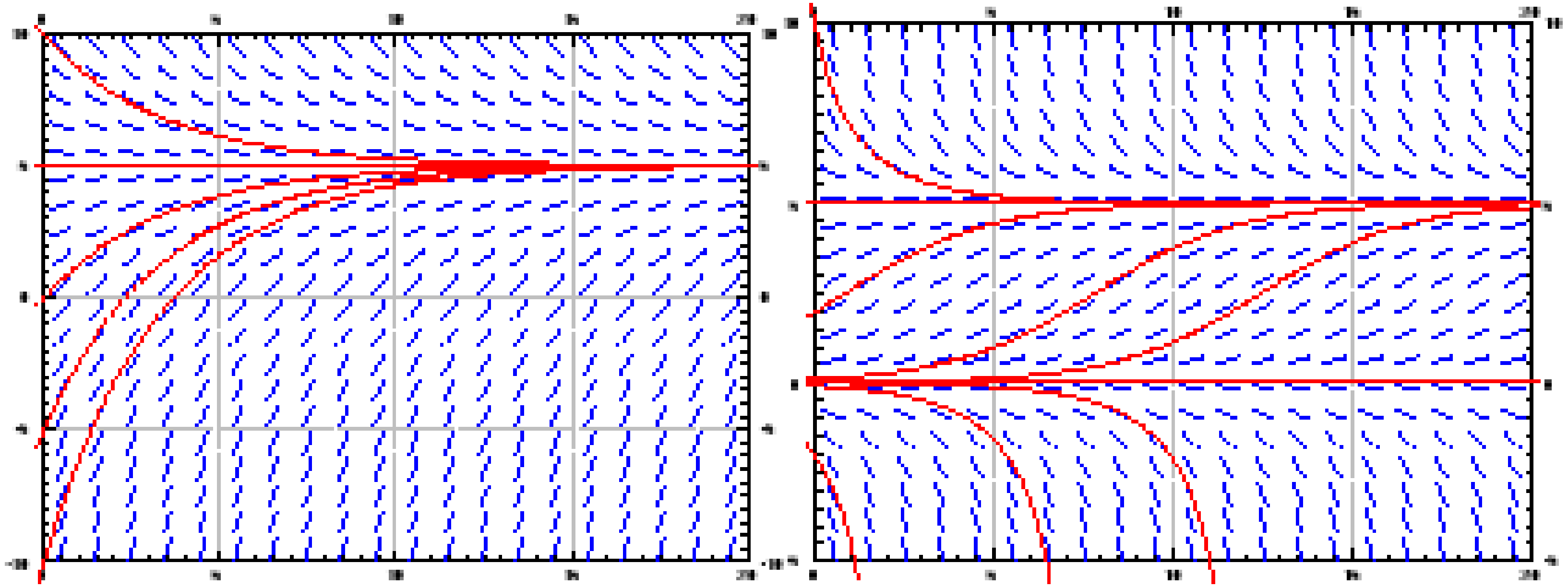
Παραδείγματα



Σχήμα : Πληθυσμιακό μοντέλο.

Παραδείγματα



Σχήμα : Πεδία κατευθύνσεων και γραφική παράσταση μερικών λύσεων των εξισώσεων $x' = -0.3(x-5)$ και $x' = -0.1x(5-x)$.

Ευσταθείς Λύσεις

Μια λύση (ή ένα κρίσιμο σημείο) λέγετε ‘ευσταθής’ όταν μικρές διαταραχές στο x δεν οδηγούν σε ουσιαστικά διαφορετικές λύσεις για αρκετά μεγάλο t.

Παράδειγμα - Λογιστική Εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x).$$

Πληθυσμιακό μοντέλο εάν γνωρίσουμε ότι ο πληθυσμός ενός είδους δεν μπορεί να υπερβεί τον αριθμό M.

Παράδειγμα - Λογιστική Εξίσωση

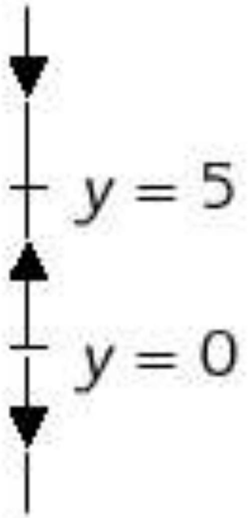
$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x),$$

Πληθυσμιακό μοντέλο εάν γνωρίσουμε ότι ο πληθυσμός ενός είδους δεν μπορεί να υπερβεί τον αριθμό M.

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} 5 & \text{αν } x(0) > 0, \\ 0 & \text{αν } x(0) = 0, \\ \Delta\Upsilon \text{ ή } -\infty & \text{αν } x(0) < 0. \end{cases}$$

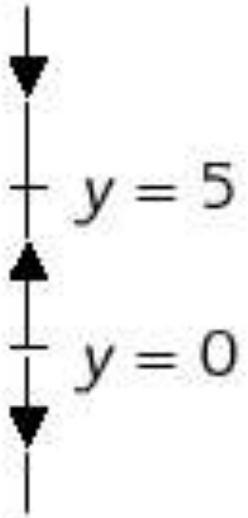
Διάγραμμα Φάσης

Συμπεριφορά της λύσης σε βάθος χρόνου



Διάγραμμα Φάσης

Συμπεριφορά της λύσης σε βάθος χρόνου



Γενικά

Λογιστική Εξίσωση με Κατανάλωση

Μια ομάδα ανθρώπων βασίζει την επιβίωσή της στην εκτροφή μια αγέλης ζώων.

Λογιστική Εξίσωση με Κατανάλωση

Μια ομάδα ανθρώπων βασίζει την επιβίωσή της στην εκτροφή μια αγέλης ζώων.

Έστω

- Τα καταναλώνει με ρυθμό h ζώα τον χρόνο.
- x πλήθος ζώων (χιλιάδες)
- t χρόνος (έτη).
- M ελάχιστος πληθυσμός κάτω από τον οποίο δεν επιτρέπεται η κατανάλωση ζώων.
- $k > 0$ σταθερά αναπαραγωγής των ζώων.

Λογιστική Εξίσωση με Κατανάλωση

Μια ομάδα ανθρώπων βασίζει την επιβίωσή της στην εκτροφή μια αγέλης ζώων.

Έστω

- Τα καταναλώνει με ρυθμό h ζώα τον χρόνο.
- x πλήθος ζώων (χιλιάδες)
- t χρόνος (έτη).
- M ελάχιστος πληθυσμός κάτω από τον οποίο δεν επιτρέπεται η κατανάλωση ζώων.
- $k>0$ σταθερά αναπαραγωγής των ζώων.

$$\frac{dx}{dt} = kx(M-x) - h.$$

Λογιστική Εξίσωση με Κατανάλωση

Μια ομάδα ανθρώπων βασίζει την επιβίωσή της στην εκτροφή μια αγέλης ζώων.

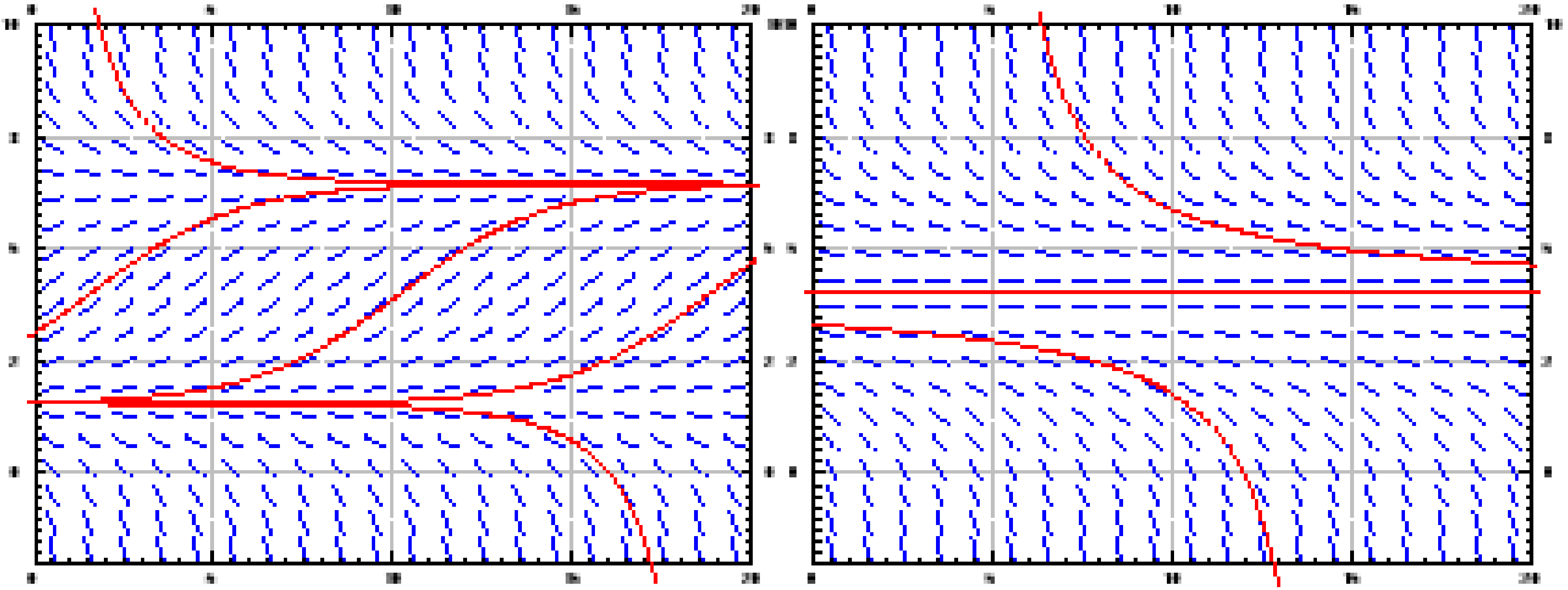
Έστω

- Τα καταναλώνει με ρυθμό h ζώα τον χρόνο.
- x πλήθος ζώων (χιλιάδες)
- t χρόνος (έτη).
- M ελάχιστος πληθυσμός κάτω από τον οποίο δεν επιτρέπεται η κατανάλωση ζώων.
- $k > 0$ σταθερά αναπαραγωγής των ζώων.

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x) - h.$$

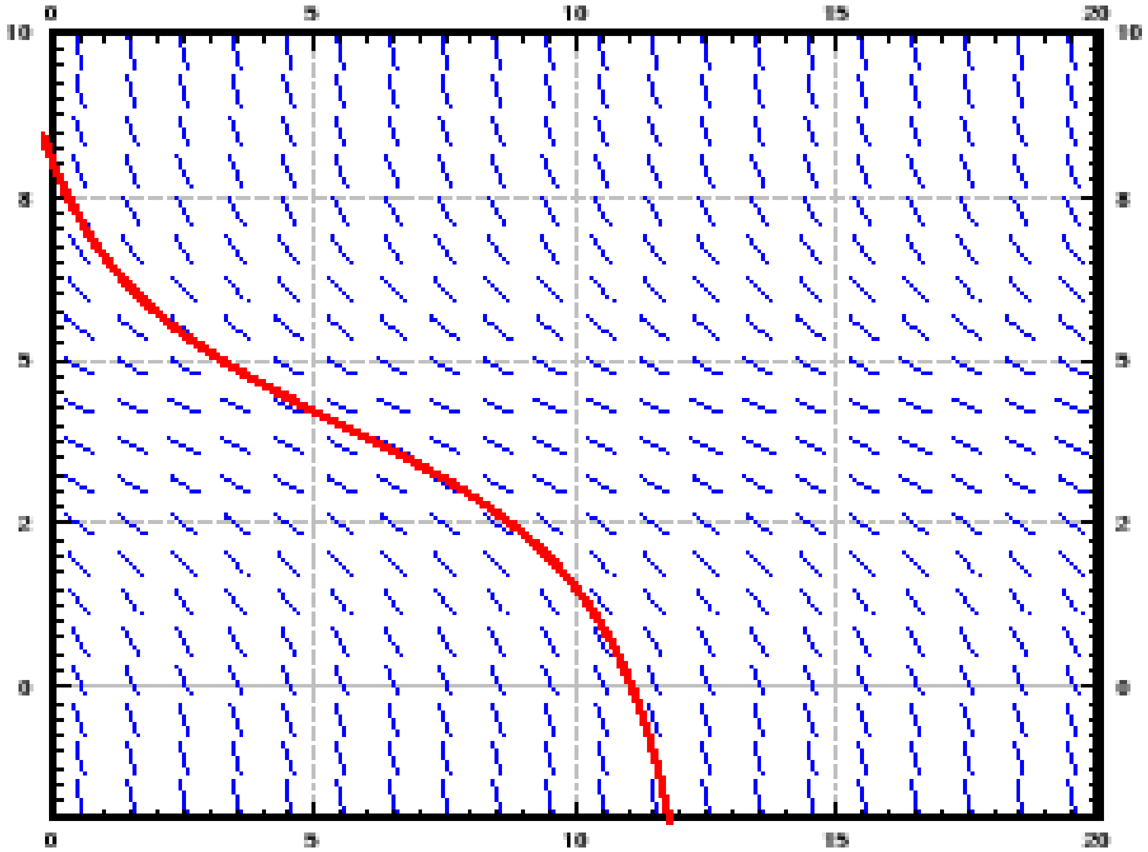
Κρίσιμα σημεία: $A, B = \frac{kM \pm \sqrt{(kM)^2 - 4hk}}{2k}$.

Λογιστική Εξίσωση με Κατανάλωση (h=1, 1.6)



Σχήμα : Πεδία κατευθύνσεων και μερικές λύσεις των εξισώσεων $x' = -0.1x(8-x) - 1$ και $x' = -0.1x(8-x) - 1.6$.

Λογιστική Εξίσωση με Κατανάλωση ($h=2$)



Σχήμα : Πεδία κατευθύνσεων και μερικές λύσεις των εξισώσεων $x' = -0.1x(8-x) - 2$.

Γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ανώτερης Τάξης

Γραμμικές ΣΔΕ 2ης τάξης
ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές
Μιγαδικές ρίζες
Γραμμικές ΣΔΕ υψηλότερης τάξης
Γραμμική ανεξαρτησία

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

8 Μαρτίου 2015, Βόλος

Γραμμικές ΣΔΕ 2ης τάξης

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x).$$

Γραμμικές ΣΔΕ 2ης τάξης

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x).$$

ή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{1}$$

Γραμμικές ΣΔΕ 2ης τάξης

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x).$$

ή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{1}$$

Ομογενής γραμμική εξίσωση όταν $f(x) = 0$.

Παραδείγματα

$y'' + k^2 y = 0$ Δυο λύσεις: $y_1 = \cos kx, \quad y_2 = \sin kx.$

$y'' - k^2 y = 0$ Δυο λύσεις: $y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = e^{-kx}.$

Θεώρημα Υπέρθεσης

Αν y_1 και y_2 είναι δύο λύσεις της ομογενούς εξίσωσης τότε η

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

είναι επίσης λύση της, για οποιεσδήποτε σταθερές C_1 και C_2.

Μπορούμε *να* προσθέσουμε λύσεις (ή *να* πολλαπλασιάσουμε λύσεις με κάποιον αριθμό) και το αποτέλεσμα *να* είναι επίσης λύση.

Θεώρημα Υπέρθεσης - Απόδειξη

Έστω $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Τότε

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1 p y_1' + C_2 p y_2' + C_1 q y_1 + C_2 q y_2 \\ &= C_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Έστω ότι οι p, q, f είναι συνεχείς συναρτήσεις και ότι οι α, b_0, b_1 είναι σταθερές. Η εξίσωση

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

έχει ακριβώς μια λύση $y(x)$ η οποία ικανοποιεί τις εξής αρχικές συνθήκες

$$y(\alpha) = b_0 \qquad y'(\alpha) = b_1 .$$

Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Έστω ότι οι p, q, f είναι συνεχείς συναρτήσεις και ότι οι α, b_0, b_1 είναι σταθερές. Η εξίσωση

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

έχει ακριβώς μια λύση $y(x)$ η οποία ικανοποιεί τις εξής αρχικές συνθήκες

$$y(\alpha) = b_0 \qquad y'(\alpha) = b_1 .$$

Παραδείγματα,

- $y'' + y = 0$ με $y(0) = b_0$ και $y'(0) = b_1 \Rightarrow$ $y(x) = b_0 \cos x + b_1 \sin x$.
- $y'' - y = 0$ με $y(0) = b_0$ και $y'(0) = b_1 \Rightarrow$ $y(x) = b_0 \cosh x + b_1 \sinh x$.

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

$$-2 = y(0) = C_1 + C_2, \quad 6 \qquad = y'(0) = 2C_1 + 4C_2.$$

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

$$-2 = y(0) = C_1 + C_2, \quad 6 \qquad = y'(0) = 2C_1 + 4C_2.$$

$$y = -7e^{2x} + 5e^{4x}.$$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.