Διαφορικές Εξισώσεις

Σειρές Fourier

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

24 Απριλίου 2013, Βόλος

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1, \ \alpha = 0, \ b = \pi.$

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1,\ \alpha = 0,\ b = \pi.$

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos t + B\sin t.$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos t + B\sin t$.
Άπειρες λύσεις του προβλήματος: $x = B\sin t$.

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1,\ \alpha = 0,\ b = \pi.$

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos t + B\sin t.$
Άπειρες λύσεις του προβλήματος: $x = B\sin t.$

Παράδειγμα: $\lambda = 2,\ \alpha = 0,\ b = \pi.$

$$x'' + 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1,\ \alpha = 0,\ b = \pi.$

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos t + B\sin t.$
Άπειρες λύσεις του προβλήματος: $x = B\sin t.$

Παράδειγμα: $\lambda = 2,\ \alpha = 0,\ b = \pi.$

$$x'' + 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos\sqrt{2}\,t + B\sin\sqrt{2}\,t.$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos t + B\sin t$.
Άπειρες λύσεις του προβλήματος: $x = B\sin t$.

Παράδειγμα: $\lambda = 2$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos\sqrt{2}\,t + B\sin\sqrt{2}\,t$.
Μοναδική λύση του προβλήματος: $x = 0$.

Προβλήματα ιδιοτιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0, \tag{1}$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(\alpha) = 0, \quad x'(b) = 0, \tag{2}$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = x(b), \quad x'(\alpha) = x'(b), \tag{3}$$

Προβλήματα ιδιοτιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0, \tag{1}$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(\alpha) = 0, \quad x'(b) = 0, \tag{2}$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = x(b), \quad x'(\alpha) = x'(b), \tag{3}$$

Ένα αριθμός λ λέγεται *ιδιοτιμή του προβλήματος συνοριακών τιμών* ανν, με δεδομένο το συγκεκριμένο λ, υπάρχει μη-μηδενική λύση του η οποία λέγεται το αντίστοιχο *ιδιοδιάνυσμα*.

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A\cos\sqrt{\lambda}t + B\sin\sqrt{\lambda}t.$$

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t.$$

$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$
$0 = x(\pi) = B \sin \sqrt{\lambda} \pi \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A\cos\sqrt{\lambda}t + B\sin\sqrt{\lambda}t.$$

$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$
$0 = x(\pi) = B\sin\sqrt{\lambda}\pi \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \sqrt{\lambda} = k$

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A\cos\sqrt{\lambda}t + B\sin\sqrt{\lambda}t.$$

$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$
$0 = x(\pi) = B\sin\sqrt{\lambda}\pi \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \sqrt{\lambda} = k$
Ιδιοτιμές k^2 $\forall k \geq 1$, ιδιοσυναρτήσεις $x = \sin kt$.

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A\cos\sqrt{\lambda}t + B\sin\sqrt{\lambda}t.$$

$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$
$0 = x(\pi) = B\sin\sqrt{\lambda}\pi \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \sqrt{\lambda} = k$
Ιδιοτιμές k^2 $\forall k \geq 1$, ιδιοσυναρτήσεις $x = \sin kt$.
Αν $\lambda = 0$ η γενική λύση είναι $x = At + B$.
$x(0) = 0 \Rightarrow B = 0,$ $x(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0.$

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A\cos\sqrt{\lambda}t + B\sin\sqrt{\lambda}t.$$

$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$
$0 = x(\pi) = B\sin\sqrt{\lambda}\pi \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \sqrt{\lambda} = k$
Ιδιοτιμές k^2 $\forall k \geq 1$, ιδιοσυναρτήσεις $x = \sin kt$.
Αν $\lambda = 0$ η γενική λύση είναι $x = At + B$.
$x(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, $x(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0$.
$\lambda = 0$ *δεν* είναι ιδιοτιμή.

Συμπέρασμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \quad \forall k \geq 1\,.$$

Συμπέρασμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \quad \forall k \geq 1\,.$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(\alpha) = 0, \quad x'(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \qquad \forall k \geq 1\,.$$

και

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_0 = 1\,.$$

Συμπέρασμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \quad \forall k \geq 1\,.$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(\alpha) = 0, \quad x'(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \qquad \forall k \geq 1\,.$$

και

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_0 = 1\,.$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = x(b), \quad x'(\alpha) = x'(b),$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιανύσματα} \quad \cos kt \quad \text{και} \quad \sin kt \quad \forall k \geq 1\,,$$

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_0 = 1\,.$$

Θεώρημα ορθογωνιότητας

Εάν $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις κάποιου προβλήματος που ανήκει σε κάποια απο τις προηγούμενες τρεις κατηγορίες προβλημάτων που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 τότε αυτές είναι *ορθογώνιες* με την εξής έννοια

$$\int_{\alpha}^{b} x_1(t)x_2(t)\ dt = 0.$$

Τριγωνομετρικές ορθογωνιότητες

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin mt)(\sin nt)\ dt = 0, \qquad \text{όταν } m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos mt)(\cos nt)\ dt = 0, \qquad \text{όταν } m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos mt)(\sin nt)\ dt = 0.$$

Εναλλακτικό θεώρημα του *Fredholm*

Είτε το

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{4}$$

έχει μια μη-μηδενική λύση, είτε το

$$x'' + \lambda x = f(t), \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{5}$$

έχει μια μοναδική λύση για κάθε συνεχή f.

Εναλλακτικό θεώρημα του *Fredholm*

Είτε το

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{4}$$

έχει μια μη-μηδενική λύση, είτε το

$$x'' + \lambda x = f(t), \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{5}$$

έχει μια μοναδική λύση για κάθε συνεχή f. Δηλαδή

- Αν το λ δεν είναι ιδιοτιμή, τότε το μη-ομογενές πρόβλημα έχει μοναδική λύση για κάθε δεξιό μέλος.
- Αν το λ είναι ιδιοτιμή τότε το πρόβλημα μπορεί να μην έχει λύση για κάποιες f, και επιπρόσθετα, ακόμα και εάν έχει λύση τότε αυτή δεν θα είναι μοναδική.

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P-περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t+P)$ για κάθε t.

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P-περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t+P)$ για κάθε t.
- Μια P-περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$-περιοδική, $3P$-περιοδική ...

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P-περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t+P)$ για κάθε t.
- Μια P-περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$-περιοδική, $3P$-περιοδική ...
- $\cos t$ και $\sin t$ είναι 2π-περιοδική

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P-περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t+P)$ για κάθε t.
- Μια P-περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$-περιοδική, $3P$-περιοδική ...
- $\cos t$ και $\sin t$ είναι 2π-περιοδική (όπως και οι $\cos kt$ και $\sin kt$ για κάθε ακέραιο k)

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P-περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t+P)$ για κάθε t.
- Μια P-περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$-περιοδική, $3P$-περιοδική ...
- $\cos t$ και $\sin t$ είναι 2π-περιοδική (όπως και οι $\cos kt$ και $\sin kt$ για κάθε ακέραιο k)
- Οι σταθερές συναρτήσεις αποτελούν ακραία παραδείγματα περιοδικών συναρτήσεων

Περιοδικές επεκτάσεις

Επεκτείνουμε περιοδικά $f(t)$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[-L, L]$ (την κάνουμε $2L$-περιοδική συνάρτηση) ορίζοντας μια *νέα* συνάρτηση $F(t)$ τέτοια ώστε

- Για t στο $[-L, L]$, $F(t) = f(t)$
- Για t στο $[L, 3L]$, $F(t) = f(t - 2L)$
- Για t στο $[-3L, -L]$, $F(t) = f(t + 2L)$
- $\ldots$

Περιοδικές επεκτάσεις

Επεκτείνουμε περιοδικά $f(t)$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[-L, L]$ (την *κάνουμε* $2L$-περιοδική συνάρτηση) ορίζοντας μια *νέα* συνάρτηση $F(t)$ τέτοια ώστε

- Για t στο $[-L, L]$, $F(t) = f(t)$
- Για t στο $[L, 3L]$, $F(t) = f(t-2L)$
- Για t στο $[-3L, -L]$, $F(t) = f(t+2L)$
- $\ldots$

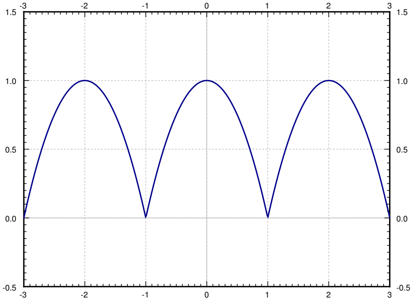
Παράδειγμα: $f(t) = 1 - t^2,\ t \in [-1, 1]$

Περιοδικές επεκτάσεις

Επεκτείνουμε περιοδικά $f(t)$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[-L, L]$ (την κάνουμε $2L$-περιοδική συνάρτηση) ορίζοντας μια *νέα* συνάρτηση $F(t)$ τέτοια ώστε

- Για t στο $[-L, L]$, $F(t) = f(t)$
- Για t στο $[L, 3L]$, $F(t) = f(t-2L)$
- Για t στο $[-3L, -L]$, $F(t) = f(t+2L)$
- ...

Παράδειγμα: $f(t) = 1 - t^2$, $t \in [-1, 1]$



Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0.$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0.$

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w_1} \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w_1} \rangle} = \frac{2(1) + 3(-1)}{1(1) + (-1)(-1)} = \frac{-1}{2}.$$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0.$

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w_1} \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w_1} \rangle} = \frac{2(1) + 3(-1)}{1(1) + (-1)(-1)} = \frac{-1}{2}.$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w_2} \rangle}{\langle \vec{w_2}, \vec{w_2} \rangle} = \frac{2 + 3}{1 + 1} = \frac{5}{2}.$$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0$.

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} = \frac{2(1) + 3(-1)}{1(1) + (-1)(-1)} = \frac{-1}{2}.$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} = \frac{2+3}{1+1} = \frac{5}{2}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ορισμοί

Σειρά Fourier του $f(t)$

Ορισμοί

Σειρά Fourier του $f(t)$

$$\boxed{f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.}$$

Ορισμοί

Σειρά Fourier του $f(t)$

$$\boxed{f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.}$$

Εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων

Ορισμοί

Σειρά Fourier του $f(t)$

$$\boxed{f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.}$$

Εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων

$$\langle f(t)\,,\, g(t)\,\rangle \overset{\text{ορισμός}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\ dt.$$

Ανάπτυγμα *Fourier* της $f(x)$

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Ανάπτυγμα *Fourier* της $f(x)$

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

όπου

$$\alpha_n = \frac{\langle f(t)\,,\, \cos nt\,\rangle}{\langle\,\cos nt\,,\, \cos nt\,\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ \,dt,$$

$$b_n = \frac{\langle f(t)\,,\, \sin nt\,\rangle}{\langle\,\sin nt\,,\, \sin nt\,\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\ \,dt.$$

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = t$$

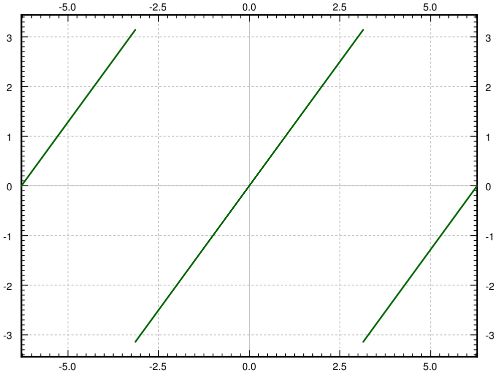
για t στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Επεκτείνετε περιοδικά την $f(t)$ και γράψτε την σε μορφή σειράς *Fourier*.

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = t$$

για t στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Επεκτείνετε περιοδικά την $f(t)$ και γράψτε την σε μορφή σειράς *Fourier*.



Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos mt \; dt = 0.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos mt \ dt = 0.$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin mt \ dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin mt \ dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{-t\cos mt}{m}\right]_{t=0}^{\pi} + \frac{1}{m}\int_0^{\pi}\cos mt \ dt\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos m\pi}{m} + 0\right) = \frac{-2\cos m\pi}{m} = \frac{2(-1)^{m+1}}{m}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos mt \; dt = 0.$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin mt \; dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin mt \; dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos m\pi}{m} + 0\right) = \frac{-2\cos m\pi}{m} = \frac{2\,(-1)^{m+1}}{m}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos mt \; dt = 0.$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin mt \; dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin mt \; dt$$

$$\frac{2\,(-1)^{m+1}}{m}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos mt \; dt = 0.$$

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin mt \; dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin mt \; dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{-t\cos mt}{m}\right]_{t=0}^{\pi} + \frac{1}{m}\int_0^{\pi} \cos mt \; dt\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos m\pi}{m} + 0\right) = \frac{-2\cos m\pi}{m} = \frac{2\,(-1)^{m+1}}{m}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

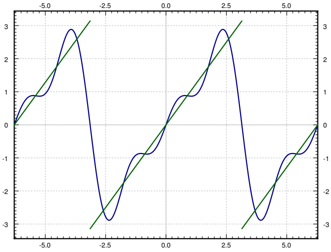
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \sin nt =$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \sin nt = 2\,\sin t - \sin 2\,t + \frac{2}{3}\sin 3\,t + \cdots$$

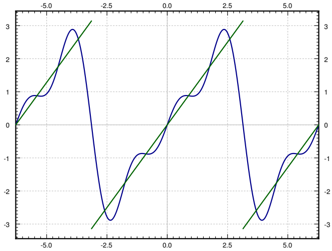
Παράδειγμα (συνέχεια)

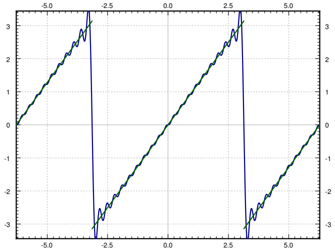
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}\ \sin nt = 2\ \sin t - \sin 2\,t + \frac{2}{3}\sin 3\,t + \cdots$$



Παράδειγμα (συνέχεια)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}\,\sin nt = 2\,\sin t - \sin 2\,t + \frac{2}{3}\sin 3\,t + \cdots$$



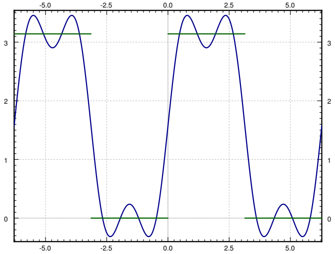


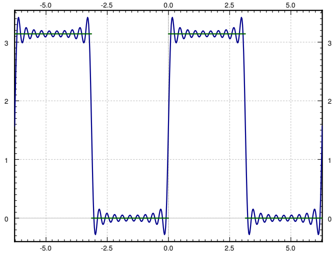
Παράδειγμα

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } -\pi < t \leq 0, \\ \pi & \text{αν } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

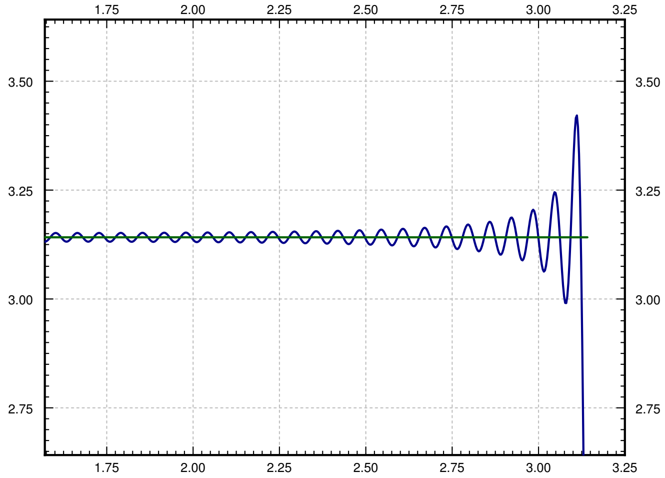
Παράδειγμα

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } -\pi < t \leq 0, \\ \pi & \text{αν } 0 < t \leq \pi. \end{cases} = \frac{\pi}{2} + 2\sin t + \frac{2}{3}\sin 3t + \cdots$$





φαινομένο του *Gibbs*



$2L$-περιοδικές συναρτήσεις

Αν η $f(t)$ είναι $2L$-περιοδική, ο μετασχηματισμός $s = \frac{\pi}{L} t$ μας δίνει την 2π-περιοδική

$$g(s) = f\left(\frac{L}{\pi} s\right)$$

με ανάπτυγμα

$$\boxed{f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t.}$$

Εάν αλλάξουμε την μεταβλητή t σε s βλέπουμε ότι

$$g(s) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos ns + b_n \sin ns.$$

2L-περιοδικές συναρτήσεις (συνέχεια)

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)\ ds = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\ dt, \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)\cos ns\ ds = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi}{L}t\ dt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)\sin ns\ ds = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi}{L}t\ dt. \end{aligned}}$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt \\
&= 2\left[\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{t=0}^{1} - 2\int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t \; dt \\
&= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\Big[\cos n\pi t\Big]_{t=0}^{1} = \frac{2\big((-1)^n - 1\big)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\alpha_0 = \int_{-1}^{1} |t| \; dt = 1, \qquad b_n = \int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t \; dt = 0.
$$

Άρα

$$
f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t.
$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\alpha_n = 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt$$

$$= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\Big[\cos n\pi t\Big]_{t=0}^{1} = \frac{2\big((-1)^n - 1\big)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^{1} |t| \; dt = 1, \qquad b_n = \int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t \; dt = 0.$$

Άρα

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\alpha_n = 2\int_0^1 t \cos n\pi t \; dt$$

$$\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 |t| \; dt = 1, \qquad b_n = \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t \; dt = 0.$$

Άρα

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos n\pi t.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\alpha_n = 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt$$

$$\begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^{1} |t| \; dt = 1, \qquad b_n = \int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t \; dt = 0.$$

Άρα

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt \\
&= 2\left[\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{t=0}^{1} - 2\int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t \; dt \\
&= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\Big[\cos n\pi t\Big]_{t=0}^{1} = \frac{2\big((-1)^n - 1\big)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt \\
&= 2\left[\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{t=0}^{1} - 2\int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t \; dt \\
&= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\Big[\cos n\pi t\Big]_{t=0}^{1} = \frac{2\big((-1)^n - 1\big)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\alpha_0 = \int_{-1}^{1} |t| \; dt = 1, \qquad b_n = \int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t \; dt = 0.
$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt \\
&= 2\left[\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{t=0}^1 - 2\int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t \; dt \\
&= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi t\right]_{t=0}^1 = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\alpha_0 = \int_{-1}^1 |t| \; dt = 1, \qquad b_n = \int_{-1}^1 f(t)\sin n\pi t \; dt = 0.
$$

Άρα

$$
f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t.
$$

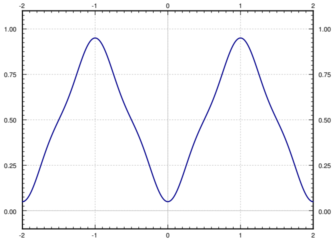
Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$ (συνέχεια)

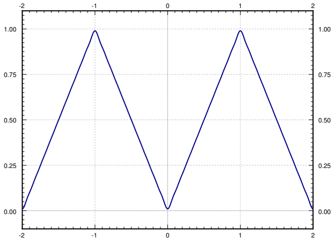
Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$ (συνέχεια)

$$f(t) \approx \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi t - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi t - \cdots$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$ (συνέχεια)

$$f(t) \approx \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi t - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi t - \cdots$$





Περιττές και άρτιες περιοδικές συναρτήσεις

Αν $f(t)$ ορισμένη στο $[0, L]$ τότε

$$F_{\text{περιττή}}(t) \overset{\text{ορισμός}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \le t \le L, \\ -f(-t) & \text{αν } -L < t < 0, \end{cases}$$

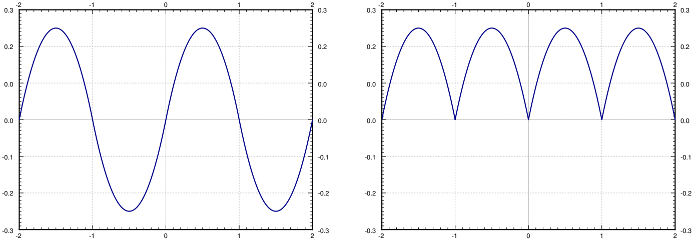
$$F_{\text{άρτια}}(t) \overset{\text{ορισμός}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \le t \le L, \\ f(-t) & \text{αν } -L < t < 0. \end{cases}$$

Περιττές και άρτιες περιοδικές συναρτήσεις

Αν $f(t)$ ορισμένη στο $[0, L]$ τότε

$$F_{\text{περιττή}}(t) \stackrel{\text{ορισμός}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \le t \le L, \\ -f(-t) & \text{αν } -L < t < 0, \end{cases}$$

$$F_{\text{άρτια}}(t) \stackrel{\text{ορισμός}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \le t \le L, \\ f(-t) & \text{αν } -L < t < 0. \end{cases}$$



Σχήμα : Περιττή και άρτια 2-περιοδική επέκταση της $f(t) = t(1-t)$, $0 \le t \le 1$.

Σειρές *Fourier* άρτιων και περιττών επεκτάσεων

Θεώρημα $f(t)$ μια τμηματικά συνεχής στο $[0, L]$ τότε η περιττή της επέκταση έχει το εξής ανάπτυγμα.

$$\boxed{F_{\text{περιττή}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} t,}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t \; dt.}$$

Η άρτια επέκταση της $f(t)$ έχει το εξής ανάπτυγμα

$$\boxed{F_{\text{άρτια}}(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi}{L} t,}$$

$$\boxed{\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t \; dt.}$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t, \quad c_n = 2\int_0^1 t \sin n\pi t \; dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t, \quad c_n = 2\int_0^1 t \sin n\pi t \; dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

Παράδειγμα:
$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t, \quad c_n = 2\int_0^1 t \sin n\pi t \; dt = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

$$\begin{aligned} x''(t) + 2x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -b_n n^2 \pi^2 \sin n\pi t + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (2 - n^2\pi^2) \sin n\pi t. \end{aligned}$$

Παράδειγμα: $x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t, \quad c_n = 2\int_0^1 t \sin n\pi t \; dt = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

$$x''(t) + 2x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -b_n n^2\pi^2 \sin n\pi t + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(2 - n^2\pi^2) \sin n\pi t.$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi\,(2 - n^2\pi^2)} \sin n\pi t.$$

Παράδειγμα: $x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

Παράδειγμα:
$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

$$c_0 = 2\int_0^1 t \; dt = 1,$$

Παράδειγμα: $x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

$$c_0 = 2\int_0^1 t \; dt = 1,$$

$$c_n = 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 n^2} & n \text{ περιττό}, \\ 0 & n \text{ άρτιο}. \end{cases}$$

Παράδειγμα:
$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

$$c_0 = 2\int_0^1 t \, dt = 1,$$

$$c_n = 2\int_0^1 t \cos n\pi t \, dt = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 n^2} & n \text{ περιττό}, \\ 0 & n \text{ άρτιο}. \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t.$$

Παράδειγμα (συνέχεια): $x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$

$$x''(t) + 2x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\alpha_n n^2 \pi^2 \cos n\pi t \right] + \alpha_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos n\pi t \right]$$

$$= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (2 - n^2\pi^2) \cos n\pi t$$

$$= f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \ \text{περιττό}}}^{\infty} \frac{-2}{\pi^2 n^2} \cos n\pi t.$$

Παράδειγμα (συνέχεια): $x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$

$$x''(t) + 2x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\alpha_n n^2 \pi^2 \cos n\pi t\right] + \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos n\pi t\right]$$

$$= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (2 - n^2\pi^2) \cos n\pi t$$

$$= f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{-2}{\pi^2 n^2} \cos n\pi t.$$

$$x(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{-4}{n^2\pi^2(2 - n^2\pi^2)} \cos n\pi t.$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{sp}$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{sp}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{L}t + d_n \sin\frac{n\pi}{L}t$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{sp}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{L}t + d_n \sin\frac{n\pi}{L}t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\frac{n\pi}{L}t + b_n \sin\frac{n\pi}{L}t$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{sp}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{L}t + d_n \sin\frac{n\pi}{L}t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\frac{n\pi}{L}t + b_n \sin\frac{n\pi}{L}t$$

Αντικαθιστούμε το x στην εξίσωση και υπολογίζουμε τα α_n και b_n συναρτήσει των c_n και d_n.

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

$$c_n = \int_{-1}^{1} F(t) \cos n\pi t \; dt = 0$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi\, t + d_n \sin n\pi\, t$$

$$c_n = \int_{-1}^{1} F(t) \cos n\pi t \; dt = 0 \qquad c_0 = \int_{-1}^{1} F(t) \; dt = 1$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi\, t + d_n \sin n\pi\, t$$

$$c_n = \int_{-1}^{1} F(t) \cos n\pi t \; dt = 0 \qquad c_0 = \int_{-1}^{1} F(t) \; dt = 1$$

$$d_n = \int_{-1}^{1} F(t) \sin n\pi t \; dt$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

$$c_n = \int_{-1}^{1} F(t) \cos n\pi t \; dt = 0 \qquad c_0 = \int_{-1}^{1} F(t) \; dt = 1$$

$$d_n = \int_{-1}^{1} F(t) \sin n\pi t \; dt = \left[\frac{-\cos n\pi t}{n\pi} \right]_{t=0}^{1}$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi\, t + d_n \sin n\pi\, t$$

$$c_n = \int_{-1}^{1} F(t) \cos n\pi t \; dt = 0 \qquad c_0 = \int_{-1}^{1} F(t) \; dt = 1$$

$$d_n = \int_{-1}^{1} F(t) \sin n\pi t \; dt = \left[\frac{-\cos n\pi t}{n\pi}\right]_{t=0}^{1} = \frac{1-(-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & n \\ 0 & n \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \ \text{περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} b_n \sin n\pi t$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} b_n \sin n\pi t$$

$$x'' + 2x = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[-b_n n^2 \pi^2 \sin n\pi t\right] + \alpha_0 + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[b_n \sin n\pi t\right]$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} b_n \sin n\pi t$$

$$x'' + 2x = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[-b_n n^2 \pi^2 \sin n\pi t \right] + \alpha_0 + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[b_n \sin n\pi t \right]$$

$$= \alpha_0 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \; n \text{ περιττό}}}^{\infty} b_n (2 - n^2 \pi^2) \sin n\pi t = F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$x_{sp}(t) = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n(2 - n^2\pi^2)} \sin n\pi t.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$x_{sp}(t) = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n(2 - n^2\pi^2)} \sin n\pi t.$$