Διαφορικές Εξισώσεις

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, Ιδιοτιμές με πολλαπλότητα, Ατελείς ιδιοτιμές Εκθετικά πινάκων

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

9 Απριλίου 2013, Βόλος

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t. \tag{1}$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t. \tag{1}$$

Μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c}\cos\omega t,$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t. \tag{1}$$

Μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c}\cos\omega t,$$

$$\vec{x}_p'' = -\omega^2\vec{c}\cos\omega t.$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t. \tag{1}$$

Μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c}\cos\omega t,$$

$$\vec{x}_p'' = -\omega^2\vec{c}\cos\omega t.$$

$$-\omega^2\vec{c}\cos\omega t = A\vec{c}\cos\omega t + \vec{F}\cos\omega t$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t. \tag{1}$$

Μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c}\cos\omega t,$$

$$\vec{x}_p{}'' = -\omega^2\vec{c}\cos\omega t.$$

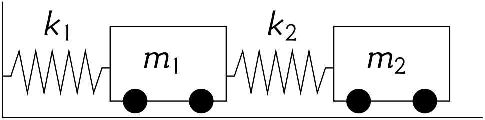
$$-\omega^2\vec{c}\cos\omega t = A\vec{c}\cos\omega t + \vec{F}\cos\omega t$$

$$(A + \omega^2 I)\vec{c} = -\vec{F}.$$

Οπότε

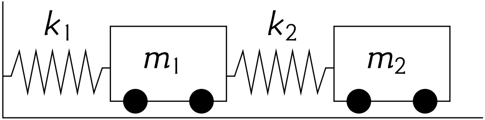
$$\vec{c} = (A + \omega^2 I)^{-1}(-\vec{F}).$$

Παράδειγμα



$m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ k_1 = 4,$ και $k_2 = 2$

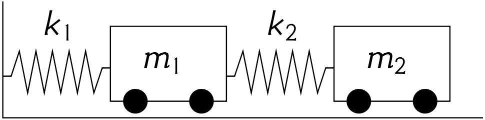
Παράδειγμα



$m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ k_1 = 4,$ και $k_2 = 2$

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Παράδειγμα

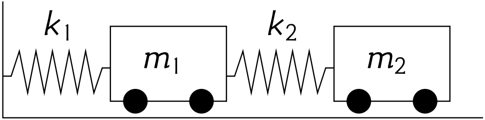


$m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ k_1 = 4,$ και $k_2 = 2$

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t).$$

Παράδειγμα



$m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ k_1 = 4,$ και $k_2 = 2$

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t).$$

$$(A + \omega^2 I)\vec{c} = -\vec{F}$$

Δηλαδή

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3^2 I \right) \vec{c} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{-3}{10} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα (η λύση)

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t$$

Παράδειγμα (η λύση)

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t$$

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p =$$

Παράδειγμα (η λύση)

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t$$

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{-3}{10} \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

- *αλγεβρική πολλαπλότητα* 2

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

- *αλγεβρική πολλαπλότητα* 2
- *γεωμετρική πολλαπλότητα* 2 επειδή υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

- *αλγεβρική πολλαπλότητα* 2
- *γεωμετρική πολλαπλότητα* 2 επειδή υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής (τα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$).

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

- *αλγεβρική πολλαπλότητα* 2
- *γεωμετρική πολλαπλότητα* 2 επειδή υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής (τα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$).

Το $\vec{x}' = A\vec{x}$ έχει την εξής γενική λύση

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές ($-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \cdots > -\omega_n^2$), με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, . . . , $\vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),}$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές ($-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \cdots > -\omega_n^2$), με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i (\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),}$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Αν ο A έχει μια μηδενική ιδιοτιμή, ($\omega_1 = 0$), ενώ όλες οι άλλες ιδιοτιμές είναι αρνητικές και διαφορετικές μεταξύ τους τότε η γενική λύση είναι

$$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{v}_1 (\alpha_1 + b_1 t) + \sum_{i=2}^{n} \vec{v}_i (\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t).}$$

Θεώρημα - Λύσεις με πολλαπλότητα

Έστω $\vec{x}' = P\vec{x}$. Αν P είναι ένα $n \times n$ πίνακας ο οποίος έχει τις εξής n πραγματικές ιδιοτιμές (οι οποίες δεν είναι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους), $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, και αν σε αυτές αντιστοιχούν τα εξής n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, τότε η γενική λύση του συστήματος ΣΔΕ μπορεί να γραφθεί ως εξής

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\vec{v}_n e^{\lambda_n t}.$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές $(-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \cdots > -\omega_n^2)$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),}$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές $(-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \cdots > -\omega_n^2)$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),}$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Αν ο A έχει μια μηδενική ιδιοτιμή, $(\omega_1 = 0)$, ενώ όλες οι άλλες ιδιοτιμές είναι αρνητικές και διαφορετικές μεταξύ τους τότε η γενική λύση είναι

$$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{v}_1(\alpha_1 + b_1 t) + \sum_{i=2}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t).}$$

Ατελείς ιδιοτιμές

ατελής ιδιοτιμή κάθε ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από την γεωμετρική.

Ατελείς ιδιοτιμές

ατελής ιδιοτιμή κάθε ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από την γεωμετρική.
Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ατελείς ιδιοτιμές

ατελής ιδιοτιμή κάθε ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από την γεωμετρική.
Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Ατελείς ιδιοτιμές

ατελής ιδιοτιμή κάθε ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από την γεωμετρική.
Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

$\left[\begin{smallmatrix} v_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right].$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}\,' = A\vec{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}\,' = A\vec{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}\,' = A\vec{x}$, $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$
Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t}.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}\,' = A\vec{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2{}' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1)\, e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}\,' = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2\,' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1)\, e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}\,' = A\vec{x}$, $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2{}' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1)\, e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = A\vec{v}_2$ και $3\vec{v}_1 = A\vec{v}_1$.

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2{}' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1)\, e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = A\vec{v}_2$ και $3\vec{v}_1 = A\vec{v}_1$.

$$(A - 3I)\vec{v}_1 = \vec{0}, \qquad \text{και} \qquad (A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}\,' = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2{}' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1)\, e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = A\vec{v}_2$ και $3\vec{v}_1 = A\vec{v}_1$.

$$(A - 3I)\vec{v}_1 = \vec{0}, \qquad \text{και} \qquad (A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

$$(A - 3I)(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{0}, \qquad \text{ή} \qquad (A - 3I)^2\vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Παράδειγμα

$(A-3I)^2 = 0$. Το κάθε $\vec{v}_2$ είναι λύση του $(A-3I)^2\vec{v}_2 = \vec{0}$. Άρα αρκεί $(A-3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

Παράδειγμα

$(A-3I)^2=0$. Το κάθε $\vec{v}_2$ είναι λύση του $(A-3I)^2\vec{v}_2=\vec{0}$. Άρα αρκεί $(A-3I)\vec{v}_2=\vec{v}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$(A-3I)^2 = 0$. Το κάθε $\vec{v}_2$ είναι λύση του $(A-3I)^2\vec{v}_2 = \vec{0}$. Άρα αρκεί $(A-3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω $\alpha = 0$ $b = 1$. Άρα $\vec{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Παράδειγμα

$(A-3I)^2=0$. Το κάθε $\vec{v}_2$ είναι λύση του $(A-3I)^2\vec{v}_2=\vec{0}$. Άρα αρκεί $(A-3I)\vec{v}_2=\vec{v}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω $\alpha=0$ $b=1$. Άρα $\vec{v}_2=\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.
Η γενική λύση του $\vec{x}'=A\vec{x}$ είναι

$$\vec{x}=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}+c_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t\right) e^{3t}=\begin{bmatrix} c_1e^{3t}+c_2te^{3t} \\ c_2e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας 2 ατέλειας 1

Βρες το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ του λ.

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας 2 ατέλειας 1

Βρες το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ του λ. Μετά πρέπει να βρούμε ένα $\vec{v}_2$ τέτοιο ώστε

$$
\begin{aligned}
(A - 3I)^2 \vec{v}_2 &= \vec{0}, \\
(A - 3I)\vec{v}_2 &= \vec{v}_1 .
\end{aligned}
$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας 2 ατέλειας 1

Βρες το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ του λ. Μετά πρέπει να βρούμε ένα $\vec{v}_2$ τέτοιο ώστε

$$(A - 3I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0},$$
$$(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1 .$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda t},$$
$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{\lambda t}.$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας m

Βρες τα *γενικευμένα ιδιοδιανύσματα*

$$(A - \lambda I)^k \vec{v} = \vec{0}, \qquad \text{αλλά} \qquad (A - \lambda I)^{k-1} \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας m

Βρες τα *γενικευμένα ιδιοδιανύσματα*

$$(A-\lambda I)^k\vec{v}=\vec{0}, \qquad \text{αλλά} \qquad (A-\lambda I)^{k-1}\vec{v}\neq\vec{0}.$$

Για κάθε ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ βρες μια σειρά γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων $\vec{v}_2 \dots \vec{v}_k$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)\vec{v}_1 &= \vec{0},\\ (A-\lambda I)\vec{v}_2 &= \vec{v}_1,\\ &\vdots\\ (A-\lambda I)\vec{v}_k &= \vec{v}_{k-1}.\end{aligned}$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας m

Βρες τα *γενικευμένα ιδιοδιανύσματα*

$$(A-\lambda I)^k \vec{v} = \vec{0}, \qquad \text{αλλά} \qquad (A-\lambda I)^{k-1} \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Για κάθε ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ βρες μια σειρά *γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων* $\vec{v}_2 \ \ldots \ \vec{v}_k$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)\vec{v}_1 &= \vec{0},\\ (A-\lambda I)\vec{v}_2 &= \vec{v}_1,\\ &\vdots\\ (A-\lambda I)\vec{v}_k &= \vec{v}_{k-1}.\end{aligned}$$

Οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{v}_1 e^{\lambda t},\\ \vec{x}_2 &= (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t)\, e^{\lambda t},\\ &\vdots\end{aligned}$$

Εκθετικά

$$\vec{x}\,' = P\vec{x},$$

μαντεψιά

$$\vec{x} = e^{Pt}.$$

Εκθετικά

$$\vec{x}\,' = P\vec{x},$$

μαντεψιά

$$\vec{x} = e^{Pt}.$$

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} + \frac{(\alpha t)^3}{6} + \frac{(\alpha t)^4}{24} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!}.$$

Εκθετικά

$$\vec{x}\,' = P\vec{x},$$

μαντεψιά

$$\vec{x} = e^{Pt}.$$

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} + \frac{(\alpha t)^3}{6} + \frac{(\alpha t)^4}{24} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!}.$$

$$\alpha + \alpha^2 t + \frac{\alpha^3 t^2}{2} + \frac{\alpha^4 t^3}{6} + \cdots = \alpha \left(1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} + \frac{(\alpha t)^3}{6} + \cdots \right) = \alpha e^{\alpha$$

Εκθετικά Πινάκων

$$\boxed{e^A \overset{\text{ορισμός}}{=} I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots}$$

Εκθετικά Πινάκων

$$\boxed{e^{A} \overset{\text{ορισμός}}{=} I + A + \frac{1}{2}A^{2} + \frac{1}{6}A^{3} + \cdots + \frac{1}{k!}A^{k} + \cdots}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\right) = Pe^{tP}.$$

Θεώρημα

Εάν P είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε η γενική λύση του $\vec{x}\,' = P\vec{x}$ είναι

$$\vec{x} = e^{tP}\vec{c},$$

όπου $\vec{c}$ είναι ένα οποιοδήποτε σταθερό διάνυσμα. Μάλιστα ισχύει η σχέση $\vec{x}(0) = \vec{c}$.

Πρόβλημα

Εάν $AB = BA$ τότε $e^{A+B} = e^A e^B$. Ειδάλλως έχουμε $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Απλές περιπτώσεις

Διαγώνιοι πίνακες
Πίνακες τ.ω. $A^k = 0$ για $k > 2$.

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}.$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}.$

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \cdots$$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$.

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \cdots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix} + \cdots$$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$.

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \cdots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}.$$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$.

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \cdots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}.$$

και παρεμπιπτόντως

$$e^I = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad e^{\alpha I} = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\alpha \end{bmatrix}.$$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$
Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$e^{tA} = e^{tB+2tI}$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$

Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} =$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$

Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} = e^{tB}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$

Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} = e^{tB}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

Όμως $B^2 = 0$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$

Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} = e^{tB}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

Όμως $B^2 = 0 \Rightarrow B^k = 0 \quad \forall k \geq 2$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$

Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} = e^{tB} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

Όμως $B^2 = 0 \Rightarrow B^k = 0 \quad \forall k \geq 2$ άρα

$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + 3t & -3t \\ 3t & 1 - 3t \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} (1 + 3t)\, e^{2t} & -3te^{2t} \\ 3te^{2t} & (1 - 3t)\, e^{2t} \end{bmatrix}.$

Γενική περίπτωση

Βασικό εργαλείο
$e^{BAB^{-1}} = Be^{A}B^{-1}$

Γενική περίπτωση

Βασικό εργαλείο

$$e^{BAB^{-1}} = Be^{A}B^{-1} \quad \Rightarrow \quad (BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1}.$$

Γενική περίπτωση

Βασικό εργαλείο

$$e^{BAB^{-1}} = Be^{A}B^{-1} \quad \Rightarrow \quad (BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1}.$$

$$\begin{aligned} e^{BAB^{-1}} &= I + BAB^{-1} + \frac{1}{2}(BAB^{-1})^2 + \frac{1}{6}(BAB^{-1})^3 + \cdots \\ &= BB^{-1} + BAB^{-1} + \frac{1}{2}BA^2B^{-1} + \frac{1}{6}BA^3B^{-1} + \cdots \\ &= B\Big(I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots\Big)B^{-1} \\ &= Be^{A}B^{-1}. \end{aligned}$$

Η λύση με εκθετικά

Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές και $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ τα (γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του A .

Η λύση με εκθετικά

Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές και $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ τα (γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του A . Έστω E ο πίνακας ο οποίος έχει σαν στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A.

Η λύση με εκθετικά

Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές και $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ τα (γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του A .
Έστω E ο πίνακας ο οποίος έχει σαν στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A.
Τότε

$$\boxed{e^{tA} = Ee^{tD}E^{-1} = E \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} E^{-1}.}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad x(0) = 4 \quad y(0) = 2.$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad x(0) = 4 \quad y(0) = 2.$$

Ιδιοτιμές: 3 και -1, ιδιοδιανύσματα: $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad x(0) = 4 \quad y(0) = 2.$$

Ιδιοτιμές: 3 και -1, ιδιοδιανύσματα: $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -e^{3t} - e^{-t} & -e^{3t} + e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad x(0) = 4 \quad y(0) = 2.$$

Ιδιοτιμές: 3 και -1, ιδιοδιανύσματα: $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -e^{3t} - e^{-t} & -e^{3t} + e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{3t} + e^{-t} \\ 3e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

$$e^{tP}\vec{x}\,'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

$$e^{tP}\vec{x}\,'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$ και $\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\right) = Pe^{tP}$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

$$e^{tP}\vec{x}\,'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$ και $\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\right) = Pe^{tP}$ άρα

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\vec{x}(t)\right) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

$$e^{tP}\vec{x}\,'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$ και $\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\right) = Pe^{tP}$ άρα

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\vec{x}(t)\right) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

$$e^{tP}\vec{x}(t) = \int e^{tP}\vec{f}(t)\; dt + \vec{c}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

$$e^{tP}\vec{x}\,'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$ και $\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\right) = Pe^{tP}$ άρα

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\vec{x}(t)\right) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

$$e^{tP}\vec{x}(t) = \int e^{tP}\vec{f}(t)\ dt + \vec{c}.$$

$$\vec{x}(t) = e^{-tP}\int e^{tP}\vec{f}(t)\ dt + e^{-tP}\vec{c}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \qquad \vec{x}(0) = \vec{b}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \qquad \vec{x}(0) = \vec{b}.$$

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{-tP}\int_0^t e^{sP}\vec{f}(s)\ ds + e^{-tP}\vec{b}.}$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \qquad \vec{x}(0) = \vec{b}.$$

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{-tP}\int_0^t e^{sP}\vec{f}(s)\;ds + e^{-tP}\vec{b}.}$$

$$\vec{x}(0) = e^{-0P}\int_0^0 e^{sP}\vec{f}(s)\;ds + e^{-0P}\vec{b} = I\vec{b} = \vec{b}.$$

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
x_1' + 5x_1 - 3x_2 &= e^t, \\
x_2' + 3x_1 - x_2 &= 0, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
x_1' + 5x_1 - 3x_2 &= e^t, \\
x_2' + 3x_1 - x_2 &= 0, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\vec{x}\,' + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' + 5x_1 - 3x_2 &= e^t, \\ x_2' + 3x_1 - x_2 &= 0, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{x}\,' + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$e^{tP} = \begin{bmatrix} (1+3t)\,e^{2t} & -3te^{2t} \\ 3te^{2t} & (1-3t)\,e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' + 5x_1 - 3x_2 &= e^t, \\ x_2' + 3x_1 - x_2 &= 0, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{x}\,' + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$e^{tP} = \begin{bmatrix} (1+3t)\,e^{2t} & -3te^{2t} \\ 3te^{2t} & (1-3t)\,e^{2t} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{sP} \vec{f}(s)\; ds &= \int_0^t \begin{bmatrix} (1+3s)\,e^{2s} & -3se^{2s} \\ 3se^{2s} & (1-3s)\,e^{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \end{bmatrix} \; ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} (1+3s)\,e^{3s} \\ 3se^{3s} \end{bmatrix} \; ds = \begin{bmatrix} te^{3t} \\ \frac{(3t-1)\,e^{3t}+1}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\vec{x}(t) = e^{-tP}\int_0^t e^{sP}\vec{f}(s)\ ds + e^{-tP}\vec{b}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-3t)\,e^{-2t} & 3te^{-2t} \\ -3te^{-2t} & (1+3t)\,e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{3t} \\ \frac{(3t-1)\,e^{3t}+1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)\,e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} te^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3}+t\right)\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)\,e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-2t)\,e^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3}-2t\right)\ e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\vec{x}(t) = e^{-tP} \int_0^t e^{sP} \vec{f}(s)\ ds + e^{-tP} \vec{b}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - 2t)\, e^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3} - 2t\right)\, e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= e^{-tP}\int_0^t e^{sP}\vec{f}(s)\; ds + e^{-tP}\vec{b} \\
&= \begin{bmatrix} (1-3t)\,e^{-2t} & 3te^{-2t} \\ -3te^{-2t} & (1+3t)\,e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{3t} \\ \frac{(3t-1)\,e^{3t}+1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)\,e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} te^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3}+t\right)\, e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)\,e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1-2t)\,e^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3}-2t\right)\, e^{-2t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad . \tag{2}$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad . \tag{2}$$

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A.

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad . \tag{2}$$

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A.
Έστω

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1\, \xi_1(t) + \vec{v}_2\, \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, \xi_n(t). \tag{3}$$

και

$$\vec{f}(t) = \vec{v}_1\, g_1(t) + \vec{v}_2\, g_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, g_n(t). \tag{4}$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad . \tag{2}$$

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A. Έστω

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1\, \xi_1(t) + \vec{v}_2\, \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, \xi_n(t). \tag{3}$$

και

$$\vec{f}(t) = \vec{v}_1\, g_1(t) + \vec{v}_2\, g_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, g_n(t). \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}\,' &= \vec{v}_1\, \xi_1' + \vec{v}_2\, \xi_2' + \cdots + \vec{v}_n\, \xi_n' \\
&= A\left(\vec{v}_1\, \xi_1 + \vec{v}_2\, \xi_2 + \cdots + \vec{v}_n\, \xi_n\right) + \vec{v}_1\, g_1 + \vec{v}_2\, g_2 + \cdots + \vec{v}_n\, g_n \\
&= A\vec{v}_1\, \xi_1 + A\vec{v}_2\, \xi_2 + \cdots + A\vec{v}_n\, \xi_n + \vec{v}_1\, g_1 + \vec{v}_2\, g_2 + \cdots + \vec{v}_n\, g_n \\
&= \vec{v}_1\, \lambda_1\, \xi_1 + \vec{v}_2\, \lambda_2\, \xi_2 + \cdots + \vec{v}_n\, \lambda_n\, \xi_n + \vec{v}_1\, g_1 + \vec{v}_2\, g_2 + \cdots + \vec{v}_n\, g_n \\
&= \vec{v}_1\, (\lambda_1\, \xi_1 + g_1) + \vec{v}_2\, (\lambda_2\, \xi_2 + g_2) + \cdots + \vec{v}_n\, (\lambda_n\, \xi_n + g_n).
\end{aligned}$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
\xi_1' &= \lambda_1 \xi_1 + g_1, \\
\xi_2' &= \lambda_2 \xi_2 + g_2, \\
&\vdots \\
\xi_n' &= \lambda_n \xi_n + g_n.
\end{aligned}
$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= \lambda_1 \xi_1 + g_1, \\
\xi_2' &= \lambda_2 \xi_2 + g_2, \\
&\vdots \\
\xi_n' &= \lambda_n \xi_n + g_n.
\end{aligned}$$

$$\xi_k'(t) - \lambda_k \xi_k(t) = g_k(t).$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \lambda_1 \, \xi_1 + g_1, \\ \xi_2' &= \lambda_2 \, \xi_2 + g_2, \\ &\vdots \\ \xi_n' &= \lambda_n \, \xi_n + g_n. \end{aligned}$$

$$\xi_k'(t) - \lambda_k \, \xi_k(t) = g_k(t).$$

$$\frac{d}{dx}\left[\xi_k(t) \, e^{-\lambda_k t}\right] = e^{-\lambda_k t} g_k(t).$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \lambda_1 \xi_1 + g_1, \\ \xi_2' &= \lambda_2 \xi_2 + g_2, \\ &\vdots \\ \xi_n' &= \lambda_n \xi_n + g_n. \end{aligned}$$

$$\xi_k'(t) - \lambda_k \xi_k(t) = g_k(t).$$

$$\frac{d}{dx}\left[\xi_k(t)\, e^{-\lambda_k t}\right] = e^{-\lambda_k t} g_k(t).$$

$$\xi_k(t) = e^{\lambda_k t} \int e^{-\lambda_k t} g_k(t) \; dt + C_k e^{\lambda_k t}.$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\boxed{\xi_k(t) = e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} g_k(s) \; dt + \alpha_k e^{\lambda_k t},}$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\boxed{\xi_k(t) = e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} g_k(s)\ dt + \alpha_k e^{\lambda_k t},}$$

$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 \xi_1(t) + \vec{v}_2 \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n \xi_n(t)$ η οποία ικανοποιεί την $\vec{x}(0) = \vec{b}$, επειδή $\xi_k(0) = \alpha_k$.

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f} \text{ όπου } \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} \text{ για } \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix}$ για $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}$.

Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix}$ για $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}$.

Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix}$ για $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}$.
Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xi_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xi_2$, $\vec{f} = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} g_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} g_2$ και
$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_2$,

Παράδειγμα

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix}$ για $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}$.

Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xi_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xi_2$, $\vec{f} = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} g_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} g_2$ και

$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_2$, όπου

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - t \\ e^t + t \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix}$ για $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}$.
Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xi_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xi_2$, $\vec{f} = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} g_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} g_2$ και
$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_2$, όπου

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - t \\ e^t + t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \begin{bmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{-5}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{16} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε, εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων και παίρνουμε

$$\xi_1' = -2\xi_1 + e^t - t, \qquad \text{όπου } \xi_1(0) = \alpha_1 = \frac{1}{4},$$

$$\xi_2' = 4\xi_2 + e^t + t, \qquad \text{όπου } \xi_2(0) = \alpha_2 = \frac{-1}{16}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε, εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων και παίρνουμε

$$\xi_1' = -2\xi_1 + e^t - t, \qquad \text{όπου } \xi_1(0) = \alpha_1 = \frac{1}{4},$$

$$\xi_2' = 4\xi_2 + e^t + t, \qquad \text{όπου } \xi_2(0) = \alpha_2 = \frac{-1}{16}.$$

$$\xi_1 = e^{-2t} \int e^{2t} (e^t - t)\ dt + C_1 e^{-2t} = \frac{e^t}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + C_1 e^{-2t}.$$

$$\xi_2 = e^{4t} \int e^{-4t} (e^t + t)\ dt + C_2 e^{4t} = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + C_2 e^{4t}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε, εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων και παίρνουμε

$$\xi_1' = -2\xi_1 + e^t - t, \qquad \text{όπου } \xi_1(0) = \alpha_1 = \frac{1}{4},$$
$$\xi_2' = 4\xi_2 + e^t + t, \qquad \text{όπου } \xi_2(0) = \alpha_2 = \frac{-1}{16}.$$

$$\xi_1 = e^{-2t} \int e^{2t} (e^t - t) \; dt + C_1 e^{-2t} = \frac{e^t}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + C_1 e^{-2t}.$$
$$\xi_2 = e^{4t} \int e^{-4t} (e^t + t) \; dt + C_2 e^{4t} = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + C_2 e^{4t}.$$

Επειδή $\xi_1(0) = {}^1\!/\!_4$ και $\xi_2(0) = {}^1\!/\!_{16}$ έχουμε $C_1 = -{}^1\!/\!_3$ και $C_2 = {}^1\!/\!_3$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε, εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων και παίρνουμε

$$\xi_1' = -2\xi_1 + e^t - t, \qquad \text{όπου } \xi_1(0) = \alpha_1 = \frac{1}{4},$$
$$\xi_2' = 4\xi_2 + e^t + t, \qquad \text{όπου } \xi_2(0) = \alpha_2 = \frac{-1}{16}.$$

$$\xi_1 = e^{-2t}\int e^{2t}(e^t - t)\, dt + C_1 e^{-2t} = \frac{e^t}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + C_1 e^{-2t}.$$
$$\xi_2 = e^{4t}\int e^{-4t}(e^t + t)\, dt + C_2 e^{4t} = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + C_2 e^{4t}.$$

Επειδή $\xi_1(0) = 1/4$ και $\xi_2(0) = 1/16$ έχουμε $C_1 = -1/3$ και $C_2 = 1/3$ και η λύση είναι

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{4t}-e^{-2t}}{3} + \frac{3-12t}{16} \\ \frac{e^{-2t}+e^{4t}+2e^t}{3} + \frac{4t-5}{16} \end{bmatrix}.$$

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}.$$

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}$.

Ιδιοτιμές -1, 1. Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Άρα

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}.$

Ιδιοτιμές -1, 1. Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Άρα

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

Μαντεψιά $\vec{x} = \vec{\alpha} e^t + \vec{b} t e^t + \vec{c} t + \vec{d}$
όπου $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, και $\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$,

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}$.
Ιδιοτιμές -1, 1. Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Άρα

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

Μαντεψιά $\vec{x} = \vec{\alpha} e^t + \vec{b} t e^t + \vec{c} t + \vec{d}$
όπου $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, και $\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$,

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -b_1 \\ -2b_1 + b_2 \end{bmatrix} t e^t + \begin{bmatrix} -c_1 \\ -2c_1 + c_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -d_1 \\ -2d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}$.

Ιδιοτιμές -1, 1. Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Άρα

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

Μαντεψιά $\vec{x} = \vec{\alpha} e^t + \vec{b} t e^t + \vec{c} t + \vec{d}$

όπου $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, και $\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$,

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -b_1 \\ -2b_1 + b_2 \end{bmatrix} t e^t + \begin{bmatrix} -c_1 \\ -2c_1 + c_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -d_1 \\ -2d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} t e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^t \\ -te^t - t - 1 \end{bmatrix}.$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x} + \vec{f}(t)$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x} + \vec{f}(t) \qquad \vec{x}_p = X(t)\,\vec{u}(t), \tag{5}$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x} + \vec{f}(t) \qquad \vec{x}_p = X(t)\,\vec{u}(t), \tag{5}$$

$$\vec{x}_p\,'(t) = X'(t)\,\vec{u}(t) + X(t)\,\vec{u}\,'(t) = A(t)\,X(t)\,\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x} + \vec{f}(t) \qquad \vec{x}_p = X(t)\,\vec{u}(t), \tag{5}$$

$$\vec{x}_p\,'(t) = X'(t)\,\vec{u}(t) + X(t)\,\vec{u}\,'(t) = A(t)\,X(t)\,\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

$$X'(t)\,\vec{u}(t) + X(t)\,\vec{u}\,'(t) = X'(t)\,\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x} + \vec{f}(t) \qquad \vec{x}_p = X(t)\,\vec{u}(t), \tag{5}$$

$$\vec{x}_p\,'(t) = X'(t)\,\vec{u}(t) + X(t)\,\vec{u}\,'(t) = A(t)\,X(t)\,\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

$$X'(t)\,\vec{u}(t) + X(t)\,\vec{u}\,'(t) = X'(t)\,\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

$$\boxed{\vec{x}_p = X(t)\int [X(t)]^{-1}\vec{f}(t)\ dt.}$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}\,' = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1). \tag{6}$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}\,' = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1). \tag{6}$$

$X = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα

$$\vec{x}\,' = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1). \tag{6}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \qquad [X(t)]^{-1} = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}\,' = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1). \tag{6}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \qquad [X(t)]^{-1} = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}_p &= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \int \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1)\; dt \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 2t \\ -t^2+1 \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ -\frac{1}{3}t^3+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^4 \\ \frac{2}{3}t^3+t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}\,' = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1). \qquad (6)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \qquad [X(t)]^{-1} = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}_p &= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \int \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1)\,dt \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 2t \\ -t^2+1 \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 \\ -\frac{1}{3}t^3+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^4 \\ \frac{2}{3}t^3+t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^4 \\ \frac{2}{3}t^3+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 t + \frac{1}{3}t^4 \\ c_2 + (c_1+1)\,t + \frac{2}{3}t^3 \end{bmatrix}.$$

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,
μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t.$$

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$, μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t.$$

Αν $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega_0 t + \vec{F}_1 \cos \omega_1 t$,

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,
μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t.$$

Αν $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega_0 t + \vec{F}_1 \cos \omega_1 t$,
μαντεψιά $\vec{a} \cos \omega_0 t$ και βρίσκουμε μια λύση του $\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_0 \cos \omega_0 t$,
μαντεψιά $\vec{b} \cos \omega_1 t$ και βρίσκουμε μια λύση του $\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_0 \cos \omega_1 t$.

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,
μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t.$$

Αν $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega_0 t + \vec{F}_1 \cos \omega_1 t$,
μαντεψιά $\vec{a} \cos \omega_0 t$ και βρίσκουμε μια λύση του $\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_0 \cos \omega_0 t$,
μαντεψιά $\vec{b} \cos \omega_1 t$ και βρίσκουμε μια λύση του $\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_0 \cos \omega_1 t$.
Προσθέσουμε τις λύσεις.

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ και $E = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ και $E = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1\, \xi_1(t) + \vec{v}_2\, \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, \xi_n(t).$$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ και $E = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1\, \xi_1(t) + \vec{v}_2\, \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, \xi_n(t).$$

$$\vec{F}(t) = \vec{v}_1\, g_1(t) + \vec{v}_2\, g_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, g_n(t).$$

οπότε έχουμε $\vec{g} = E^{-1}\vec{F}$.

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ και $E = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1\, \xi_1(t) + \vec{v}_2\, \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, \xi_n(t).$$

$$\vec{F}(t) = \vec{v}_1\, g_1(t) + \vec{v}_2\, g_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, g_n(t).$$

οπότε έχουμε $\vec{g} = E^{-1}\vec{F}$.

$$\begin{aligned}
\vec{x}'' &= \vec{v}_1\, \xi_1'' + \vec{v}_2\, \xi_2'' + \cdots + \vec{v}_n\, \xi_n'' \\
&= A\,(\vec{v}_1\, \xi_1 + \vec{v}_2\, \xi_2 + \cdots + \vec{v}_n\, \xi_n) + \vec{v}_1\, g_1 + \vec{v}_2\, g_2 + \cdots + \vec{v}_n\, g_n \\
&= A\vec{v}_1\, \xi_1 + A\vec{v}_2\, \xi_2 + \cdots + A\vec{v}_n\, \xi_n + \vec{v}_1\, g_1 + \vec{v}_2\, g_2 + \cdots + \vec{v}_n\, g_n \\
&= \vec{v}_1\, \lambda_1\, \xi_1 + \vec{v}_2\, \lambda_2\, \xi_2 + \cdots + \vec{v}_n\, \lambda_n\, \xi_n + \vec{v}_1\, g_1 + \vec{v}_2\, g_2 + \cdots + \vec{v}_n\, g_n \\
&= \vec{v}_1\,(\lambda_1\, \xi_1 + g_1) + \vec{v}_2\,(\lambda_2\, \xi_2 + g_2) + \cdots + \vec{v}_n\,(\lambda_n\, \xi_n + g_n).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Ιδιοτ. -1 και -4, ιδιοδ. $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, $E = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, $E^{-1} = \frac{1}{3} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Παράδειγμα

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Ιδιοτ. -1 και -4, ιδιοδ. $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, $E = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, $E^{-1} = \frac{1}{3}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1}\vec{F}(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2\cos 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\cos 3t \\ \frac{-2}{3}\cos 3t \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Ιδιοτ. -1 και -4, ιδιοδ. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $E^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \vec{F}(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cos 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cos 3t \\ \frac{-2}{3} \cos 3t \end{bmatrix}.$$

$$\xi_1'' = -\xi_1 + \frac{2}{3} \cos 3t,$$

$$\xi_2'' = -4\,\xi_2 - \frac{2}{3} \cos 3t.$$