Συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

Γραμμική άλγεβρα, Μέθοδος ιδιοτιμών, Διανυσματικά πεδία

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

21 Μαρτίου 2013, Βόλος

Δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1, \\ y_2' &= y_1 - y_2, \end{aligned}$$

αρχικές συνθήκες: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

Δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους

$$y_1' = y_1,$$
$$y_2' = y_1 - y_2,$$

αρχικές συνθήκες: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

$$y_1 = C_1 e^x$$

Δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1, \\
y_2' &= y_1 - y_2,
\end{aligned}
$$

αρχικές συνθήκες: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

$$
y_1 = C_1 e^x \;\Rightarrow\; y_2' = C_1 e^x - y_2
$$

.

Δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους

$$y_1' = y_1,$$
$$y_2' = y_1 - y_2,$$

αρχικές συνθήκες: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

$$y_1 = C_1 e^x \;\Rightarrow\; y_2' = C_1 e^x - y_2$$

.

$$e^x y_2 = \frac{C_1}{2} e^{2x} + C_2 \;\Rightarrow\; y_2 = \frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{-x}$$

Δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1, \\
y_2' &= y_1 - y_2,
\end{aligned}
$$

αρχικές συνθήκες: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

$$y_1 = C_1 e^x \;\Rightarrow\; y_2' = C_1 e^x - y_2$$

.

$$e^x y_2 = \frac{C_1}{2} e^{2x} + C_2 \;\Rightarrow\; y_2 = \frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{-x}$$

Γενική λύση

$$
\begin{aligned}
y_1 &= C_1 e^x, \\
y_2 &= \frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{-x}.
\end{aligned}
$$

Δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1, \\
y_2' &= y_1 - y_2,
\end{aligned}
$$

αρχικές συνθήκες: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

$$y_1 = C_1 e^x \;\Rightarrow\; y_2' = C_1 e^x - y_2$$

.

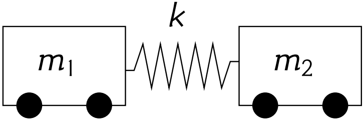
$$e^x y_2 = \frac{C_1}{2} e^{2x} + C_2 \;\Rightarrow\; y_2 = \frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{-x}$$

Γενική λύση

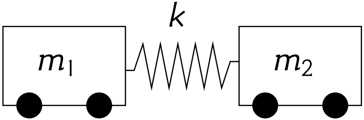
$$
\begin{aligned}
y_1 &= C_1 e^x, \\
y_2 &= \frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{-x}.
\end{aligned}
$$

Λύση $C_1 = 1$ και $C_2 = 3/2$.

Σύστημα δύο μαζών-ελατηρίων

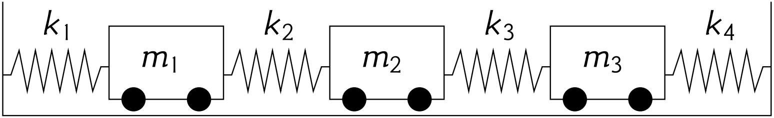


Σύστημα δύο μαζών-ελατηρίων



$$
\begin{aligned}
m_1 x_1'' &= k(x_2 - x_1),\\
m_2 x_2'' &= -k(x_2 - x_1).
\end{aligned}
$$

Συστήματα



Σχήμα : Σύστημα σωματιδίων με ελατήρια.

Πρόβλημα συστήματος δύο εξισώσεων

Δύο εξαρτημένες μεταβλητές:

$$y_1, \ y_2$$

Πρόβλημα συστήματος δύο εξισώσεων

Δύο εξαρτημένες μεταβλητές:

$$y_1, \; y_2$$

Δύο διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} y_1'' &= f_1(y_1', y_2', y_1, y_2, x), \\ y_2'' &= f_2(y_1', y_2', y_1, y_2, x), \end{aligned}$$

Πρόβλημα συστήματος δύο εξισώσεων

Δύο εξαρτημένες μεταβλητές:

$$y_1, \; y_2$$

Δύο διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} y_1'' &= f_1(y_1', y_2', y_1, y_2, x), \\ y_2'' &= f_2(y_1', y_2', y_1, y_2, x), \end{aligned}$$

Δύο αρχικές συνθήκες:

$$y_1(0) = \alpha, \; y_2(0) = b$$

.

Μία εξίσωση $\rightleftarrows$ Ένα Σύστημα

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x).$$

Μία εξίσωση ⇄ Ένα Σύστημα

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \dots, y', y, x).$$

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= F(u_n, u_{n-1}, \dots, u_2, u_1, x). \end{aligned}$$

Μία εξίσωση ⇄ Ένα Σύστημα

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \dots, y', y, x).$$

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= F(u_n, u_{n-1}, \dots, u_2, u_1, x). \end{aligned}$$

Λύνω ως προς u_1, u_2, ..., u_n

Μία εξίσωση $\rightleftarrows$ Ένα Σύστημα

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x).$$

$$\begin{aligned}
u_1' &= u_2 \\
u_2' &= u_3 \\
&\vdots \\
u_{n-1}' &= u_n \\
u_n' &= F(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_2, u_1, x).
\end{aligned}$$

Λύνω ως προς u_1, u_2, ..., u_n
Η $y = u_1$ είναι λύση της αρχικής εξίσωσης.

Ένα Σύστημα $\rightleftarrows$ Μία εξίσωση

$$x' = 2y - x, \qquad y' = x,$$

αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Ένα Σύστημα $\rightleftarrows$ Μία εξίσωση

$$x' = 2y - x, \qquad y' = x,$$

αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

$$y'' = x' = 2y - x = 2y - y' \;\Rightarrow\; y'' + y' - 2y = 0.$$

Ένα Σύστημα ⇄ Μία εξίσωση

$$x' = 2y - x, \qquad y' = x,$$

αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

$$y'' = x' = 2y - x = 2y - y' \;\Rightarrow\; y'' + y' - 2y = 0.$$

Η λύση $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

Ένα Σύστημα $\rightleftarrows$ Μία εξίσωση

$$x' = 2y - x, \qquad y' = x,$$

αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

$$y'' = x' = 2y - x = 2y - y' \;\Rightarrow\; y'' + y' - 2y = 0.$$

Η λύση $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

$$x = y' = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}.$$

$1 = x(0) = -2C_1 + C_2$ και $0 = y(0) = C_1 + C_2$. $C_1 = -1/3$ και $C_2 = 1/3$

Ένα Σύστημα ⇄ Μία εξίσωση

$$x' = 2y - x, \qquad y' = x,$$

αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

$$y'' = x' = 2y - x = 2y - y' \;\Rightarrow\; y'' + y' - 2y = 0.$$

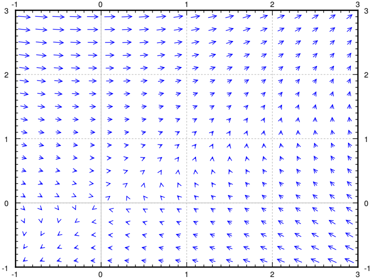
Η λύση $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$

$$x = y' = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^t.$$

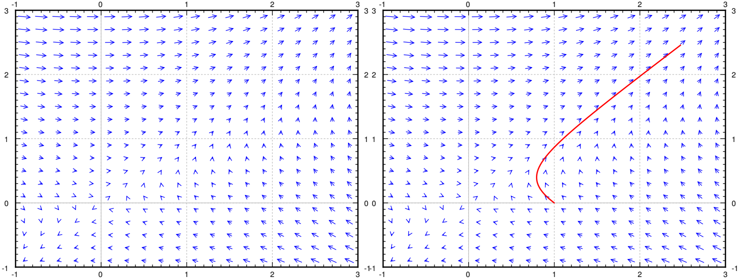
$1 = x(0) = -2C_1 + C_2$ και $0 = y(0) = C_1 + C_2$. $C_1 = -1/3$
και $C_2 = 1/3$
Η λύση

$$x = \frac{2e^{-2t} + e^t}{3}, \qquad y = \frac{-e^{-2t} + e^t}{3}.$$

Πεδίο κατευθύνσεων $x' = 2y - x,\ y' = x$



Πεδίο κατευθύνσεων $x' = 2y - x,\ y' = x$



Ορισμοί

Διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$

Ορισμοί

Διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$

Πίνακας $A(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \cdots & \alpha_{1n}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \cdots & \alpha_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(t) & \alpha_{n2}(t) & \cdots & \alpha_{nn}(t) \end{bmatrix}$

Ορισμοί

Διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.

Πίνακας $A(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \cdots & \alpha_{1n}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \cdots & \alpha_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(t) & \alpha_{n2}(t) & \cdots & \alpha_{nn}(t) \end{bmatrix}$

$A'(t)$ ή $\frac{dA}{dt}$ πίνακας με $\alpha'_{ij}(t)$ στην $ij^{\sigma\tau\eta}$ θέση.

Ορισμοί

Διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.

Πίνακας $A(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \cdots & \alpha_{1n}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \cdots & \alpha_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(t) & \alpha_{n2}(t) & \cdots & \alpha_{nn}(t) \end{bmatrix}$

$A'(t)$ ή $\frac{dA}{dt}$ πίνακας με $\alpha'_{ij}(t)$ στην $ij^{\text{στη}}$ θέση.

Ταυτότητες

$$(A+B)' = A' + B' \qquad (AB)' = A'B + AB'$$
$$(cA)' = cA' \qquad (CA)' = CA' \qquad (AC)' = A'C$$

Συστήματα σε μορφή πινάκων

$$\vec{x}\,'(t) = P(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \qquad \vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Συστήματα σε μορφή πινάκων

$$\vec{x}\,'(t) = P(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \qquad \vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= 2tx_1 + e^t x_2 + t^2, \\ x_2' &= \frac{x_1}{t} - x_2 + e^t, \end{aligned}$$

Συστήματα σε μορφή πινάκων

$$\vec{x}\,'(t) = P(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \qquad \vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= 2tx_1 + e^t x_2 + t^2, \\ x_2' &= \frac{x_1}{t} - x_2 + e^t, \end{aligned}$$

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 2t & e^t \\ 1/t & -1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα (Υπέρθεσης)

Έστω $\vec{x}' = P\vec{x}$ ένα γραμμικό ομογενές σύστημα ΣΔΕ.
Έστω ότι $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι n λύσεις της εξίσωση, τότε η

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n, \tag{1}$$

είναι επίσης λύση.

Θεώρημα (Υπέρθεσης)

Έστω $\vec{x}\,' = P\vec{x}$ ένα γραμμικό ομογενές σύστημα ΣΔΕ.
Έστω ότι $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι n λύσεις της εξίσωση, τότε η

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n, \tag{1}$$

είναι επίσης λύση.
Αν επιπρόσθετα, είναι ένα σύστημα n εξισώσεων (P είναι $n \times n$), και τα $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε κάθε λύση μπορεί να γραφθεί στην μορφή της εξίσωσης (1).

Θεώρημα (Υπέρθεσης)

Έστω $\vec{x}' = P\vec{x}$ ένα γραμμικό ομογενές σύστημα ΣΔΕ.
Έστω ότι $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι n λύσεις της εξίσωση, τότε η

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n, \qquad (1)$$

είναι επίσης λύση.
Αν επιπρόσθετα, είναι ένα σύστημα n εξισώσεων (P είναι $n \times n$), και τα $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε κάθε λύση μπορεί να γραφθεί στην μορφή της εξίσωσης (1).
Θεμελιώδης πίνακας $X(t)$:

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = X(t)\,\vec{c}$$

Θεώρημα

Εάν $\vec{x}' = P\vec{x} + \vec{f}$ είναι ένα γραμμικό σύστημα ΣΔΕ και εάν $\vec{x}_p$ μια οποιαδήποτε συγκεκριμένη λύση του, τότε κάθε λύση του μπορεί να γραφθεί στην μορφή

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p,$$

όπου $\vec{x}_c$ είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης ($\vec{x}' = P\vec{x}$).

Αρχικές συνθήκες

Γενική λύση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Αρχικές συνθήκες

Γενική λύση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}(t_0) = \vec{b}$$

Αρχικές συνθήκες

Γενική λύση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}(t_0) = \vec{b}$$

Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες του X είναι λύσεις)

Αρχικές συνθήκες

Γενική λύση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}(t_0) = \vec{b}$$

Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες του X είναι λύσεις)

Γενική λύση

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t).$$

Αρχικές συνθήκες

Γενική λύση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}(t_0) = \vec{b}$$

Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες του X είναι λύσεις)
Γενική λύση

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t).$$

Βρές $\vec{c}$ τέτοιο ώστε

$$\vec{b} = \vec{x}(t_0) = X(t_0)\vec{c} + \vec{x}_p(t_0).$$

Αρχικές συνθήκες

Γενική λύση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}(t_0) = \vec{b}$$

Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες του X είναι λύσεις)
Γενική λύση

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t).$$

Βρές $\vec{c}$ τέτοιο ώστε

$$\vec{b} = \vec{x}(t_0) = X(t_0)\vec{c} + \vec{x}_p(t_0).$$

Λύσε ως προς $\vec{c}$

$$X(t_0)\vec{c} = \vec{b} - \vec{x}_p(t_0).$$

Παράδειγμα

$$x_1' = x_1,$$
$$x_2' = x_1 - x_2.$$

Αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2.$

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1, \ x_2(0) = 2.$

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$x_1 = c_1 e^t$ και $x_2 = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}.$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2.$

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$x_1 = c_1 e^t$ και $x_2 = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}.$

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{2} e^t & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2.$

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$x_1 = c_1 e^t$ και $x_2 = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}.$

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{2} e^t & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

$$X(0)\vec{c} = \vec{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2.$

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$x_1 = c_1 e^t$ και $x_2 = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}.$

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{2} e^t & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

$$X(0)\vec{c} = \vec{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Επανάληψη

$n \times n$ **σύστημα ΔΕ**: $\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$

Επανάληψη

$n \times n$ **σύστημα ΔΕ**: $\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$
Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.

Επανάληψη

$n \times n$ **σύστημα ΔΕ**: $\vec{x}' = P\vec{x} + \vec{f}$
Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.
Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες οι λύσεις $\vec{x}_i$).
Γενικευμένη λύση ομογενούς:
$\vec{x}_c = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = X(t)\vec{c}$,

Επανάληψη

$n \times n$ **σύστημα ΔΕ**: $\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$
Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.
Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες οι λύσεις $\vec{x}_i$).
Γενικευμένη λύση ομογενούς:
$\vec{x}_c = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = X(t)\vec{c}$,
Μια οποιαδήποτε λύση μη-ομογενούς: $\vec{x}_p$

Επανάληψη

$n \times n$ **σύστημα ΔΕ**: $\vec{x}' = P\vec{x} + \vec{f}$
Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.
Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες οι λύσεις $\vec{x}_i$).
Γενικευμένη λύση ομογενούς:
$\vec{x}_c = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = X(t)\vec{c}$,
Μια οποιαδήποτε λύση μη-ομογενούς: $\vec{x}_p$
Γενικευμένη λύση μη-ομογενούς:
$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p \;\; = \;\; X(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t)$

Επανάληψη

$n \times n$ **σύστημα ΔΕ**: $\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$
Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.
Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες οι λύσεις $\vec{x}_i$).
Γενικευμένη λύση ομογενούς:
$\vec{x}_c = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = X(t)\vec{c}$,
Μια οποιαδήποτε λύση μη-ομογενούς: $\vec{x}_p$
Γενικευμένη λύση μη-ομογενούς:
$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p \quad = \quad X(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t)$
Αρχικές συνθήκες: $\vec{x}(t_0) = \vec{b} \quad \Rightarrow X(t_0)\vec{c} = \vec{b} - \vec{x}_p(t_0)$.

Λύση ομογενούς

Ομογενές σύστημα:

$$\vec{x}\,' = P\vec{x}.$$

Λύση ομογενούς

Ομογενές σύστημα:

$$\vec{x}\,' = P\vec{x}.$$

Μαντεψιά:

$$\lambda\vec{v}e^{\lambda t} = P\vec{v}e^{\lambda t}.$$

Λύση ομογενούς

Ομογενές σύστημα:

$$\vec{x}\,' = P\vec{x}.$$

Μαντεψιά:

$$\lambda\vec{v}e^{\lambda t} = P\vec{v}e^{\lambda t}.$$

Αλγεβρικό σύστημα:

$$\lambda\vec{v} = P\vec{v}.$$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Ορισμός

Αν για τον τετραγωνικό και σταθερό πίνακας A ισχύει

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Ονομάζουμε τον αριθμό λ *ιδιοτιμή* του πίνακα A και το διάνυσμα $\vec{v}$ το *ιδιοδιάνυσμα* που αντιστοιχεί στο λ.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Ορισμός

Αν για τον τετραγωνικό και σταθερό πίνακας A ισχύει

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Ονομάζουμε τον αριθμό λ *ιδιοτιμή* του πίνακα A και το διάνυσμα $\vec{v}$ το *ιδιοδιάνυσμα* που αντιστοιχεί στο λ.

Παράδειγμα

$\lambda = 2$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ιδιοτιμή και ιδιοδιάνυσμα του $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

λ ιδιοτιμή του A ανν $\det(A - \lambda I) = 0$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

λ ιδιοτιμή του A ανν $\det(A - \lambda I) = 0$.

Παράδειγμα $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

λ ιδιοτιμή του A ανν $\det(A - \lambda I) = 0$.

Παράδειγμα $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

Δοθέντος ενός ιδιοδιανύσματος λ λύνω ως προς $\vec{v}$ την

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0},$$

Ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

Δοθέντος ενός ιδιοδιανύσματος λ λύνω ως προς $\vec{v}$ την

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0},$$

Παράδειγμα $\lambda = 3$ και $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

Δοθέντος ενός ιδιοδιανύσματος λ λύνω ως προς $\vec{v}$ την

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0},$$

Παράδειγμα $\lambda = 3$ και $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

Δοθέντος ενός ιδιοδιανύσματος λ λύνω ως προς $\vec{v}$ την

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0},$$

Παράδειγμα $\lambda = 3$ και $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

$v_1 - v_2 = 0$, $v_3 = 0$, όπου η v_2 ελεύθερη μεταβλητή.

Ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

Δοθέντος ενός ιδιοδιανύσματος λ λύνω ως προς $\vec{v}$ την

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0},$$

Παράδειγμα $\lambda = 3$ και $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

$v_1 - v_2 = 0$, $v_3 = 0$, όπου η v_2 ελεύθερη μεταβλητή.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

. (μοναδικό;)

Λύση ομογενούς

Αν $\vec{x}' = P\vec{x}$ όπου ο $n \times n$ πίνακας P έχει n διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ιδιοτιμές, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ τότε υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, και η γενική λύση της ΣΔΕ μπορεί να γραφθεί ως εξής

$$\boxed{\vec{x} = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\vec{v}_n e^{\lambda_n t}.}$$

Πραγματικές ιδιοτιμές χωρίς πολλαπλότητα

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Πραγματικές ιδιοτιμές χωρίς πολλαπλότητα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Ιδιοτιμές $1, 2, 3$.

Πραγματικές ιδιοτιμές χωρίς πολλαπλότητα

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Ιδιοτιμές $1, 2, 3$. $3 \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $1 \to \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $2 \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (άσκηση).

Πραγματικές ιδιοτιμές χωρίς πολλαπλότητα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Ιδιοτιμές $1, 2, 3$. $3 \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $1 \to \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $2 \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (άσκηση).

Γενική λύση

$$\vec{x} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 e^t + C_3 e^{3t} \\ -C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ -C_2 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\det(P-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2+1 = \lambda^2-2\lambda+2 = 0.$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\det(P-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2+1 = \lambda^2-2\lambda+2 = 0.$$

Ιδιοτιμές $\lambda = 1 \pm i$.

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\det(P - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Ιδιοτιμές $\lambda = 1 \pm i$.

$$(P - (1-i)I)\vec{v} = \vec{0},$$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}.$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\det(P-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2+1 = \lambda^2-2\lambda+2 = 0.$$

Ιδιοτιμές $\lambda = 1 \pm i$.

$$(P-(1-i)I)\vec{v} = \vec{0},$$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}.$$

$\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ για $v_2 = 1$.

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\det(P - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Ιδιοτιμές $\lambda = 1 \pm i$.

$$(P - (1-i)I)\vec{v} = \vec{0},$$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}.$$

$\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ για $v_2 = 1$. Στην ιδιοτιμή $1 + i$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\left[\begin{smallmatrix} -i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\det(P - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Ιδιοτιμές $\lambda = 1 \pm i$.

$$(P - (1-i)I)\vec{v} = \vec{0},$$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}.$$

$\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ για $v_2 = 1$. Στην ιδιοτιμή $1+i$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\left[\begin{smallmatrix} -i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-i)t} + c_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{bmatrix} c_1 i e^{(1-i)t} - c_2 i e^{(1+i)t} \\ c_1 e^{(1-i)t} + c_2 e^{(1+i)t} \end{bmatrix}$$

Συζυγείς ιδιοτιμές

$$\overline{(P - \lambda I)\vec{v}} = (P - \bar{\lambda} I)\bar{\vec{v}}.$$

Συζυγείς ιδιοτιμές

$$\overline{(P - \lambda I)\vec{v}} = (P - \bar{\lambda} I)\bar{\vec{v}}.$$

$\vec{v}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha + ib$, $\Rightarrow$ $\bar{\vec{v}}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha - ib$.

Συζυγείς ιδιοτιμές

$$\overline{(P-\lambda I)\vec{v}} = (P-\bar{\lambda} I)\bar{\vec{v}}.$$

$\vec{v}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha + ib$, $\Rightarrow$ $\bar{\vec{v}}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha - ib$.

Αν $\alpha + ib$ ιδιοτ. του P με ιδιοδ. $\vec{v}$ έχουμε τις εξής λύσεις του $\vec{x}\,' = P\vec{x}$

- $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(\alpha+ib)t}$

Συζυγείς ιδιοτιμές

$$\overline{(P-\lambda I)\vec{v}} = (P-\bar{\lambda} I)\bar{\vec{v}}.$$

$$\vec{v} \text{ ιδιοδ. με ιδιοτ. } \alpha+ib, \Rightarrow \bar{\vec{v}} \text{ ιδιοδ. με ιδιοτ. } \alpha-ib.$$

Αν $\alpha+ib$ ιδιοτ. του P με ιδιοδ. $\vec{v}$ έχουμε τις εξής λύσεις του $\vec{x}\,' = P\vec{x}$

- $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(\alpha+ib)t}$
- $\vec{x}_2 = \bar{\vec{x}}_1 = \bar{\vec{v}}e^{(\alpha-ib)t}$

Συζυγείς ιδιοτιμές

$$\overline{(P-\lambda I)\vec{v}} = (P-\bar{\lambda} I)\bar{\vec{v}}.$$

$$\vec{v} \text{ ιδιοδ. με ιδιοτ. } \alpha + ib, \Rightarrow \bar{\vec{v}} \text{ ιδιοδ. με ιδιοτ. } \alpha - ib.$$

Αν $\alpha + ib$ ιδιοτ. του P με ιδιοδ. $\vec{v}$ έχουμε τις εξής λύσεις του $\vec{x}\,' = P\vec{x}$

- $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(\alpha+ib)t}$
- $\vec{x}_2 = \bar{\vec{x}}_1 = \bar{\vec{v}}e^{(\alpha-ib)t}$
- $\vec{x}_3 = \operatorname{Re}\vec{x}_1 = \operatorname{Re}\vec{v}e^{(\alpha+ib)t} = \frac{\vec{x}_1+\bar{\vec{x}}_1}{2} = \frac{\vec{x}_1+\vec{x}_2}{2}$

Συζυγείς ιδιοτιμές

$$\overline{(P-\lambda I)\vec{v}} = (P-\bar{\lambda} I)\bar{\vec{v}}.$$

$\vec{v}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha + ib$, $\Rightarrow$ $\bar{\vec{v}}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha - ib$.

Αν $\alpha + ib$ ιδιοτ. του P με ιδιοδ. $\vec{v}$ έχουμε τις εξής λύσεις του $\vec{x}\,' = P\vec{x}$

- $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(\alpha+ib)t}$
- $\vec{x}_2 = \bar{\vec{x}}_1 = \bar{\vec{v}}e^{(\alpha-ib)t}$
- $\vec{x}_3 = \operatorname{Re}\vec{x}_1 = \operatorname{Re}\vec{v}e^{(\alpha+ib)t} = \frac{\vec{x}_1+\bar{\vec{x}}_1}{2} = \frac{\vec{x}_1+\vec{x}_2}{2}$
- $\vec{x}_4 = \operatorname{Im}\vec{x}_1 = \frac{\vec{x}_1-\vec{x}_2}{2i}$

Παράδειγμα

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-i)t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \left(e^t \cos t + ie^t \sin t \right) = \begin{bmatrix} ie^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \cos t + ie^t \sin t \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-i)t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \left(e^t \cos t + ie^t \sin t\right) = \begin{bmatrix} ie^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \cos t + ie^t \sin t \end{bmatrix}.$$

$$\operatorname{Re} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{Im} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix},$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-i)t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \left(e^t \cos t + ie^t \sin t\right) = \begin{bmatrix} ie^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \cos t + ie^t \sin t \end{bmatrix}.$$

$$\operatorname{Re} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{Im} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix},$$

Η γενική λύση είναι

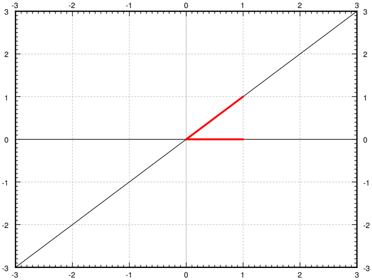
$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 e^t \sin t + c_2 e^t \cos t \\ c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t \end{bmatrix}.$$

Διανυσματικά Πεδία

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ιδιοτ. 1, 2 και ιδιοδ. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

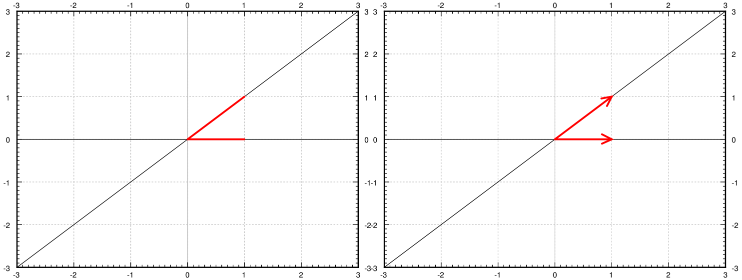
Διανυσματικά Πεδία

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ιδιοτ. 1, 2 και ιδιοδ. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Διανυσματικά Πεδία

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ιδιοτ. 1, 2 και ιδιοδ. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Σχήμα : Τα ιδιοδιανύσματα του P και οι κατευθύνσεις.

Παραδείγματα

Παραδείγματα