Συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

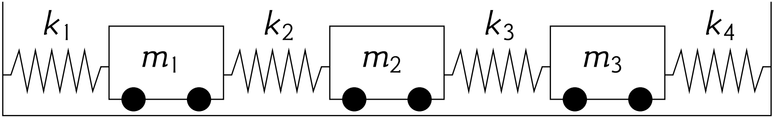
Συστήματα 2ης τάξης, Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

27 Μαρτίου 2013, Βόλος

Σύστημα ελατηρίου μάζας



Σχήμα : Σύστημα σωματιδίων με ελατήρια.

Εξισώσεις συστήματος ελατηρίου μάζας

$$M\vec{x}'' = K\vec{x}.$$

Εξισώσεις συστήματος ελατηρίου μάζας

$$M\vec{x}'' = K\vec{x}.$$

όπου

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) \end{bmatrix}$$

Επίλυση συστήματος

$$\vec{x}'' = A\vec{x}.$$

Επίλυση συστήματος

$$\vec{x}'' = A\vec{x}.$$

Μαντεψιά

$$\vec{x} = \vec{v}e^{\alpha t}$$

Επίλυση συστήματος

$$\vec{x}'' = A\vec{x}.$$

Μαντεψιά

$$\vec{x} = \vec{v}e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}'' = \alpha^2 \vec{v} e^{\alpha t}.$$

Επίλυση συστήματος

$$\vec{x}'' = A\vec{x}.$$

Μαντεψιά

$$\vec{x} = \vec{v}e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}'' = \alpha^2 \vec{v}e^{\alpha t}.$$

$$\alpha^2 \vec{v}e^{\alpha t} = A\vec{v}e^{\alpha t}$$

Επίλυση συστήματος

$$\vec{x}'' = A\vec{x}.$$

Μαντεψιά

$$\vec{x} = \vec{v}e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}'' = \alpha^2 \vec{v}e^{\alpha t}.$$

$$\alpha^2 \vec{v}e^{\alpha t} = A\vec{v}e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 \vec{v} = A\vec{v}.$$

Επίλυση συστήματος

$$\vec{x}'' = A\vec{x}.$$

Μαντεψιά

$$\vec{x} = \vec{v}e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}'' = \alpha^2 \vec{v}e^{\alpha t}.$$

$$\alpha^2 \vec{v}e^{\alpha t} = A\vec{v}e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 \vec{v} = A\vec{v}.$$

α^2 και $\vec{v}$ ιδιοζεύγος του A.

Αρνητικές ιδιοτιμές

$$\alpha^2 = \lambda < 0$$

$$\alpha = \pm i\omega, \quad -\omega^2 = \lambda$$

Αρνητικές ιδιοτιμές

$$\alpha^2 = \lambda < 0$$

$$\alpha = \pm i\omega, \quad -\omega^2 = \lambda$$

$$\vec{x} = \vec{v}(\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

Αρνητικές ιδιοτιμές

$$\alpha^2 = \lambda < 0$$

$$\alpha = \pm i\omega, \quad -\omega^2 = \lambda$$

$$\vec{x} = \vec{v}(\cos\omega t + i\sin\omega t).$$

$\vec{v}\cos\omega t$ και $\vec{v}\sin\omega t$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές $(-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \cdots > -\omega_n^2)$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύματά $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),}$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές $(-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \cdots > -\omega_n^2)$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύματά $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),}$$

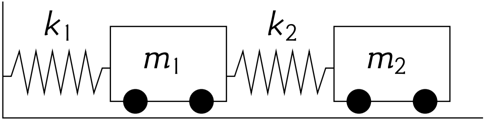
είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Αν ο A έχει μια μηδενική ιδιοτιμή, $(\omega_1 = 0)$, ενώ όλες οι άλλες ιδιοτιμές είναι αρνητικές και διαφορετικές μεταξύ τους τότε η γενική λύση είναι

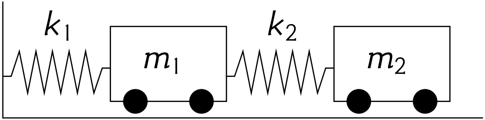
$$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{v}_1(\alpha_1 + b_1 t) + \sum_{i=2}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t).}$$

Παράδειγμα



Σχήμα : Σύστημα μάζας ελατηρίου.

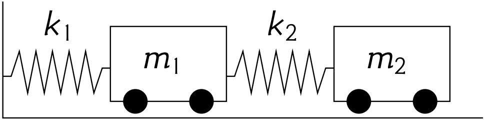
Παράδειγμα



Σχήμα : Σύστημα μάζας ελατηρίου.

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Παράδειγμα

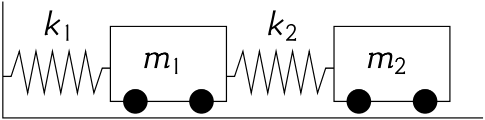


Σχήμα : Σύστημα μάζας ελατηρίου.

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$\lambda = -1, -4$ $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα



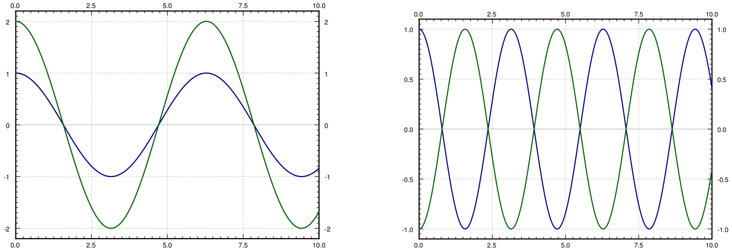
Σχήμα : Σύστημα μάζας ελατηρίου.

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$\lambda = -1, -4$ $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) .$$

Παράδειγμα (φυσικοί τρόποι ταλάντωσης)



Σχήμα : Οι δύο τρόποι ταλάντωσης ενός συστήματος μάζας ελατηρίου.

Παράδειγμα (φυσικοί τρόποι ταλάντωσης)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t)\,.$$

Παράδειγμα (φυσικοί τρόποι ταλάντωσης)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t)\,.$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} c_1 \cos(t - \alpha_2) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} c_2 \cos(2t - \alpha_1).$$

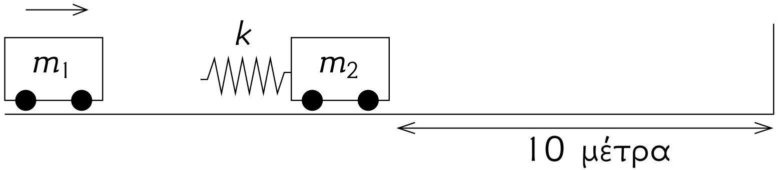
Παράδειγμα (φυσικοί τρόποι ταλάντωσης)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) \,.$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} c_1 \cos(t - \alpha_2) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} c_2 \cos(2t - \alpha_1).$$

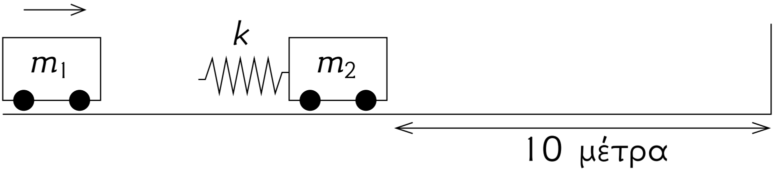
Παρατήρηση: Οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν το πλάτος και την διαφορά φάσης.

Παράδειγμα



Σχήμα : Σύγκρουση δύο βαγονέτων.

Παράδειγμα



Σχήμα : Σύγκρουση δύο βαγονέτων.

- Σε πόσο χρόνο μετά την ένωσή τους τα βαγονέτα θα συγκρουστούν στον τοίχο;
- Ποια θα είναι η ταχύτητα του δεύτερου βαγονέτου όταν θα συγκρουστεί στον τοίχο;

Παράδειγμα (συνέχεια)

$m_1 = 2,\ v_1 = 3,\ m_2 = 1,\ k = 2$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$m_1 = 2,\ v_1 = 3,\ m_2 = 1,\ k = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}'' = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$m_1 = 2,\ v_1 = 3,\ m_2 = 1,\ k = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}'' = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$m_1 = 2,\ v_1 = 3,\ m_2 = 1,\ k = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}'' = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

ιδιοτιμές 0 και -3 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα (αρχικές συνθήκες)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\alpha_1 + b_1 t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \left(\alpha_2 \cos \sqrt{3}\, t + b_2 \sin \sqrt{3}\, t \right)$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + b_1 t + \alpha_2 \cos \sqrt{3}\, t + b_2 \sin \sqrt{3}\, t \\ \alpha_1 + b_1 t - 2\alpha_2 \cos \sqrt{3}\, t - 2b_2 \sin \sqrt{3}\, t \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα (αρχικές συνθήκες)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\alpha_1 + b_1 t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \left(\alpha_2 \cos \sqrt{3}\, t + b_2 \sin \sqrt{3}\, t \right)$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + b_1 t + \alpha_2 \cos \sqrt{3}\, t + b_2 \sin \sqrt{3}\, t \\ \alpha_1 + b_1 t - 2\alpha_2 \cos \sqrt{3}\, t - 2b_2 \sin \sqrt{3}\, t \end{bmatrix}$$

Αρχικές συνθήκες:

$$\vec{0} = \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{x}'(0) = \begin{bmatrix} b_1 + \sqrt{3}\, b_2 \\ b_1 - 2\sqrt{3}\, b_2 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα (η λύση)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \\ 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα (η λύση)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\sqrt{3}\, t \\ 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\sqrt{3}\, t \end{bmatrix}.$$

- $10 = x_2(t) = 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\sqrt{3}\, t \;\Rightarrow\; t_{\text{σύγκρουση}} \approx 5.22$

Παράδειγμα (η λύση)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \\ 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \end{bmatrix}.$$

- $10 = x_2(t) = 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \;\Rightarrow\; t_{\text{σύγκρουση}} \approx 5.22$
- $x_2' = 2 - 2\cos \sqrt{3}\, t \;\Rightarrow\; x_2'(t_{\text{σύγκρουση}}) \approx 3.85.$

Παράδειγμα (η λύση)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \\ 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \end{bmatrix}.$$

- $10 = x_2(t) = 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \Rightarrow t_{\text{σύγκρουση}} \approx 5.22$
- $x_2' = 2 - 2\cos\sqrt{3}\, t \Rightarrow x_2'(t_{\text{σύγκρουση}}) \approx 3.85.$
- Μέγιστη δυνατή ταχύτητα ισούται με την μέγιστη τιμή της παράστασης $2 - 2\cos\sqrt{3}\, t$, δηλαδή 4.

Παράδειγμα (η λύση)

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \\ 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \end{bmatrix}.$$

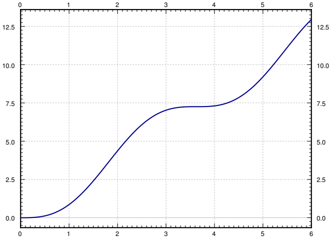
- $10 = x_2(t) = 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t \;\Rightarrow\; t_{\text{σύγκρουση}} \approx 5.22$
- $x_2' = 2 - 2\cos \sqrt{3}\, t \;\Rightarrow\; x_2'(t_{\text{σύγκρουση}}) \approx 3.85.$
- Μέγιστη δυνατή ταχύτητα ισούται με την μέγιστη τιμή της παράστασης $2 - 2\cos \sqrt{3}\, t$, δηλαδή 4.
- Σύγκρουση με την μέγιστη ταχύτητα.

Παράδειγμα (η επιβεβαίωση)

$x_2(t) = 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t.$

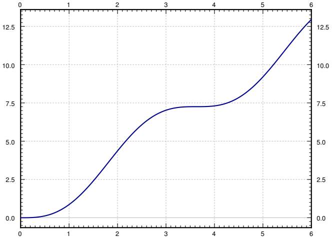
Παράδειγμα (η επιβεβαίωση)

$x_2(t) = 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t.$



Παράδειγμα (η επιβεβαίωση)

$x_2(t) = 2t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}\, t.$



Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την δυνατότητα *να* απομακρύνουμε (ή *να* πλησιάσουμε) το δεύτερο βαγονέτο από τον τοίχο χωρίς όμως *να* μπορούμε *να* αποφύγουμε την επαφή με το πρώτο βαγονέτο. Μπορούμε *να* αποφύγουμε την σύγκρουση με τον τοίχο μετακινώντας το βαγονέτο; Πόσο πρέπει *να* το μετακινήσουμε για *να* καταφέρουμε κάτι τέτοιο;