Γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ανώτερης Τάξης

Γραμμικές ΣΔΕ 2ης τάξης
ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές
Μιγαδικές ρίζες
Γραμμικές ΣΔΕ υψηλότερης τάξης
Γραμμική Ανεξαρτησία

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

17 Μαρτίου 2013, Βόλος

Γραμμικές ΣΔΕ 2ης τάξης

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x).$$

Γραμμικές ΣΔΕ 2ης τάξης

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x).$$

ή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{1}$$

Γραμμικές ΣΔΕ 2ης τάξης

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x).$$

ή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{1}$$

Ομογενής γραμμική εξίσωση όταν $f(x) = 0$.

Παραδείγματα

$y'' + k^2 y = 0$ Δυο λύσεις: $y_1 = \cos kx, \quad y_2 = \sin kx.$

$y'' - k^2 y = 0$ Δυο λύσεις: $y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = e^{-kx}.$

Θεώρημα Υπέρθεσης

Αν y_1 και y_2 είναι δύο λύσεις της ομογενούς εξίσωσης τότε η

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

είναι επίσης λύση της, για οποιεσδήποτε σταθερές C_1 και C_2.

Μπορούμε *να* προσθέσουμε λύσεις (ή *να* πολλαπλασιάσουμε λύσεις με κάποιον αριθμό) και το αποτέλεσμα *να* είναι επίσης λύση.

Θεώρημα Υπέρθεσης - Απόδειξη

Έστω $y = C_1y_1 + C_2y_2$. Τότε

$$\begin{aligned}
y'' + py' + qy &= (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) \\
&= C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1py_1' + C_2py_2' + C_1qy_1 + C_2qy_2 \\
&= C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\
&= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Έστω ότι οι p, q, f είναι συνεχείς συναρτήσεις και ότι οι α, b_0, b_1 είναι σταθερές. Η εξίσωση

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

έχει ακριβώς μια λύση $y(x)$ η οποία ικανοποιεί τις εξής αρχικές συνθήκες

$$y(\alpha) = b_0 \qquad y'(\alpha) = b_1 \,.$$

Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Έστω ότι οι p, q, f είναι συνεχείς συναρτήσεις και ότι οι α, b_0, b_1 είναι σταθερές. Η εξίσωση

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

έχει ακριβώς μια λύση $y(x)$ η οποία ικανοποιεί τις εξής αρχικές συνθήκες

$$y(\alpha) = b_0 \qquad y'(\alpha) = b_1 .$$

Παραδείγματα,

- $y'' + y = 0$ με $y(0) = b_0$ και $y'(0) = b_1 \Rightarrow$ $y(x) = b_0 \cos x + b_1 \sin x$.
- $y'' - y = 0$ με $y(0) = b_0$ και $y'(0) = b_1 \Rightarrow$ $y(x) = b_0 \cosh x + b_1 \sinh x$.

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2e^{rx}$

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τ'οτε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τ'οτε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

$$-2 = y(0) = C_1 + C_2, \quad 6 \qquad = y'(0) = 2C_1 + 4C_2.$$

ΣΔΕ 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τ·οτε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

$$-2 = y(0) = C_1 + C_2, \quad 6 \qquad = y'(0) = 2C_1 + 4C_2.$$

$$y = -7e^{2x} + 5e^{4x}.$$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2 e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}.$$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}.$$

$$-2 = y(0) = C_1 + C_2, \qquad 6 = y'(0) = 2C_1 + 4C_2.$$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 8y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y'(0) = 6.$$

Μαντεψιά: $y = e^{rx}$. Τότε $y' = re^{rx}$ και $y'' = r^2e^{rx}$

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 8y &= 0, \\ r^2e^{rx} - 6re^{rx} + 8e^{rx} &= 0, \\ r^2 - 6r + 8 &= 0, \\ (r-2)(r-4) &= 0. \end{aligned}$$

$y_1 = e^{2x}$ και $y_2 = e^{4x}$.

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}.$$

$$-2 = y(0) = C_1 + C_2, \qquad 6 = y'(0) = 2C_1 + 4C_2.$$

$$y = -7e^{2x} + 5e^{4x}.$$

Γενικά

$$\alpha y'' + by' + cy = 0$$

Γενικά

$$\alpha y'' + by' + cy = 0$$

Μαντεψιά $y = e^{rx}$

$$\alpha r^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

Γενικά

$$\alpha y'' + by' + cy = 0$$

Μαντεψιά $y = e^{rx}$

$$\alpha r^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

$$\textit{χαρακτηριστική εξίσωση } \alpha r^2 + br + c = 0.$$

Γενικά

$$\alpha y'' + by' + cy = 0$$

Μαντεψιά $y = e^{rx}$

$$\alpha r^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

χαρακτηριστική εξίσωση $\alpha r^2 + br + c = 0.$

Θεώρημα: Έστω r_1 και r_2 οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

(i) Αν $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$

(ii) Αν $r_1 = r_2 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y = (C_1 + C_2 x)\, e^{r_1 x}.$

Παραδείγματα

$$y'' - k^2 y = 0$$

Παραδείγματα

$$y'' - k^2 y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - k^2 = 0$$

Παραδείγματα

$$y'' - k^2 y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - k^2 = 0 \;\Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

Παραδείγματα

$$y'' - k^2 y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - k^2 = 0 \;\Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

Παραδείγματα

$$y'' - k^2 y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - k^2 = 0 \;\Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

$$y'' - 8y' + 16y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 8r + 16 = (r-4)^2 = 0$$

Παραδείγματα

$$y'' - k^2 y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - k^2 = 0 \;\Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

$$y'' - 8y' + 16y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 8r + 16 = (r-4)^2 = 0$$

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{4x} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Παραδείγματα

$$y'' - k^2 y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - k^2 = 0 \;\Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

$$y'' - 8y' + 16y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 8r + 16 = (r-4)^2 = 0$$

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{4x} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Είναι οι e^{4x} και xe^{4x} γραμμικές ανεξάρτητες λύσεις;

Παραδείγματα

$$y'' - k^2 y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - k^2 = 0 \;\Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

$$y'' - 8y' + 16y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 8r + 16 = (r-4)^2 = 0$$

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{4x} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Είναι οι e^{4x} και xe^{4x} γραμμικές ανεξάρτητες λύσεις;

$$y = xe^{4x} \;\Rightarrow\; y' = e^{4x} + 4xe^{4x},\; y'' = 8e^{4x} + 16xe^{4x}$$

Παραδείγματα

$$y'' - k^2 y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - k^2 = 0 \;\Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

$$y'' - 8y' + 16y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 8r + 16 = (r-4)^2 = 0$$

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{4x} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Είναι οι e^{4x} και xe^{4x} γραμμικές ανεξάρτητες λύσεις;

$$y = xe^{4x} \;\Rightarrow\; y' = e^{4x} + 4xe^{4x},\; y'' = 8e^{4x} + 16xe^{4x}$$

$$y'' - 8y' + 16y = 8e^{4x} + 16xe^{4x} - 8(e^{4x} + 4xe^{4x}) + 16xe^{4x} = 0$$

Παραδείγματα

$$y'' - k^2 y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - k^2 = 0 \;\Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

$$y'' - 8y' + 16y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 8r + 16 = (r-4)^2 = 0$$

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{4x} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Είναι οι e^{4x} και xe^{4x} γραμμικές ανεξάρτητες λύσεις;

$$y = xe^{4x} \;\Rightarrow\; y' = e^{4x} + 4xe^{4x},\; y'' = 8e^{4x} + 16xe^{4x}$$

$$y'' - 8y' + 16y = 8e^{4x} + 16xe^{4x} - 8(e^{4x} + 4xe^{4x}) + 16xe^{4x} = 0$$

$$xe^{4x} = Ce^{4x}$$

Παραδείγματα

$$y'' - k^2 y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - k^2 = 0 \;\Rightarrow y = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

$$y'' - 8y' + 16y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 8r + 16 = (r-4)^2 = 0$$

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{4x} = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}.$$

Είναι οι e^{4x} και xe^{4x} γραμμικές ανεξάρτητες λύσεις;

$$y = xe^{4x} \;\Rightarrow\; y' = e^{4x} + 4xe^{4x},\; y'' = 8e^{4x} + 16xe^{4x}$$

$$y'' - 8y' + 16y = 8e^{4x} + 16xe^{4x} - 8(e^{4x} + 4xe^{4x}) + 16xe^{4x} = 0$$

$$xe^{4x} = Ce^{4x} \;\Rightarrow\; x = C$$

Παρατηρήσεις

1. Η περίπτωση να έχουμε διπλή ρίζα είναι εξαιρετικά σπάνιο στην πράξη.

Παρατηρήσεις

1. Η περίπτωση να έχουμε διπλή ρίζα είναι εξαιρετικά σπάνιο στην πράξη.
2. Γιατί η xe^{rx} είναι λύση;

Παρατηρήσεις

1. Η περίπτωση να έχουμε διπλή ρίζα είναι εξαιρετικά σπάνιο στην πράξη.
2. Γιατί η xe^{rx} είναι λύση;
   - Έστω $r_1 \neq r_2$ τότε $\frac{e^{r_2 x} - e^{r_1 x}}{r_2 - r_1}$ είναι μια λύση.

Παρατηρήσεις

1. Η περίπτωση να έχουμε διπλή ρίζα είναι εξαιρετικά σπάνιο στην πράξη.
2. Γιατί η xe^{rx} είναι λύση;
   - Έστω $r_1 \neq r_2$ τότε $\frac{e^{r_2 x} - e^{r_1 x}}{r_2 - r_1}$ είναι μια λύση.
   - Όταν $r_1 \to r_2$ τότε $\frac{e^{r_2 x} - e^{r_1 x}}{r_2 - r_1} \to (e^{rx})' = xe^{rx}$, επίσης λύση.

Τύπος του *Euler*

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad\qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.}$$

Μιγαδικές ρίζες

$\alpha r^2 + br + c = 0$ με $b^2 - 4\alpha c < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2\alpha} \pm i\frac{\sqrt{b^2-4\alpha c}}{2\alpha}$

Μιγαδικές ρίζες

$$\alpha r^2 + br + c = 0 \text{ με } b^2 - 4\alpha c < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2\alpha} \pm i\frac{\sqrt{b^2 - 4\alpha c}}{2\alpha}$$

$$y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

Μιγαδικές ρίζες

$\alpha r^2 + br + c = 0$ με $b^2 - 4\alpha c < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2\alpha} \pm i\frac{\sqrt{b^2-4\alpha c}}{2\alpha}$

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Θέτοντας $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$ και $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$ έχουμε

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Μιγαδικές ρίζες

$\alpha r^2 + br + c = 0$ με $b^2 - 4\alpha c < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b}{2\alpha} \pm i\frac{\sqrt{b^2-4\alpha c}}{2\alpha}$

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Θέτοντας $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$ και $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$ έχουμε

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων είναι και αυτός λύση.

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Θεώρημα

Θεώρημα Αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης της διαφορικής εξίσωσης

$$\alpha y'' + by' + cy = 0.$$

είναι οι $\alpha \pm i\beta$, τότε η γενική της λύση είναι

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Παράδειγμα

$$y'' + k^2 y = 0 \quad k > 0.$$

Παράδειγμα

$$y'' + k^2 y = 0 \quad k > 0.$$

- Χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 + k^2 = 0$
- Ρίζες $r = \pm ik$
- Γενική λύση

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx.$$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 10.$$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 10.$$

Χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 - 6r + 13 = 0$ με ρίζες $r = 3 \pm 2i$ και γενική λύση

$$y = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x$$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 10.$$

Χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 - 6r + 13 = 0$ με ρίζες $r = 3 \pm 2i$ και γενική λύση

$$y = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x$$

$$0 = y(0) = C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 = C_1$$

Άρα $C_1 = 0$ συνεπώς $y = C_2 e^{3x} \sin 2x$ οπότε

$$y' = 3C_2 e^{3x} \sin 2x + 2C_2 e^{3x} \cos 2x$$

Παράδειγμα

$$y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 10.$$

Χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 - 6r + 13 = 0$ με ρίζες $r = 3 \pm 2i$ και γενική λύση

$$y = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x$$

$$0 = y(0) = C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 = C_1$$

Άρα $C_1 = 0$ συνεπώς $y = C_2 e^{3x} \sin 2x$ οπότε

$$y' = 3C_2 e^{3x} \sin 2x + 2C_2 e^{3x} \cos 2x$$

$10 = y'(0) = 2C_2$, ή $C_2 = 5$. Άρα $y = 5e^{3x} \sin 2x$

Γραμμικές ΣΔΕ υψηλότερης τάξης

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0. \qquad (2)$$

Γραμμικές ΣΔΕ υψηλότερης τάξης

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0. \qquad (2)$$

Θεώρημα Υπέρθεσης Εάν $y_1, y_2, \ldots, y_n$ είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, τότε η

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

είναι επίσης λύση για οποιεσδήποτε $C_1, \ldots, C_n$.

Γραμμικές ΣΔΕ υψηλότερης τάξης

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0. \qquad (2)$$

Θεώρημα Υπέρθεσης Εάν $y_1, y_2, \ldots, y_n$ είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, τότε η

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

είναι επίσης λύση για οποιεσδήποτε $C_1, \ldots, C_n$.

Θεώρημα Υπαρξης και Μοναδικότητας Έστω ότι οι συναρτήσεις $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$, και f είναι συνεχείς και οι $\alpha, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ είναι σταθερές. Η εξίσωση

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x),.$$

έχει ακριβώς μια λύση $y(x)$ οι οποία ικανοποιεί τις παρακάτω αρχικές συνθήκες

$$y(\alpha) = b_0, \quad y'(\alpha) = b_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(\alpha) = b_{n-1}.$$

Γραμμική Ανεξαρτησία

Ορισμός $y_1, y_2, \ldots, y_n$ είναι *γραμμικά ανεξάρτητες* αν η εξίσωση

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0,$$

έχει μόνον την τετριμμένη λύση $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Παράδειγμα

Είναι οι $e^x, e^{-x}, \cosh(x)$ γραμμικά ανεξάρτητες;

Παράδειγμα

Είναι οι $e^x, e^{-x}, \cosh(x)$ γραμμικά ανεξάρτητες;

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Παράδειγμα

Είναι οι e^x, e^{2x}, e^{3x} γραμμικά ανεξάρτητες;

Παράδειγμα

Είναι οι e^x, e^{2x}, e^{3x} γραμμικά ανεξάρτητες;

1. $c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0 \;\Rightarrow\; c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 = 0$ με $z = e^x$

Παράδειγμα

Είναι οι e^x, e^{2x}, e^{3x} γραμμικά ανεξάρτητες;

1. $c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0 \;\Rightarrow\; c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 = 0$ με $z = e^x$
2. $c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0 \;\Rightarrow\; c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 = 0$

Παράδειγμα

Είναι οι e^x, e^{2x}, e^{3x} γραμμικά ανεξάρτητες;

1. $c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0 \;\Rightarrow\; c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 = 0$ με $z = e^x$
2. $c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0 \;\Rightarrow\; c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 = 0$
3. $c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = 0 \;\Rightarrow\; c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} = 0$
   Με $x = 0$ παίρνουμε $c_1 + c_2 + c_3 = 0$.
   Παραγωγίζοντας και τα δύο μέρη έχουμε

$$c_2 e^x + 2c_3 e^{2x} = 0,$$

…

Παράδειγμα

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0,$$

Παράδειγμα

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

Παράδειγμα

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

$$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} - re^{rx} + 3e^{rx} = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$$

Παράδειγμα

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

$$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} - re^{rx} + 3e^{rx} = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{3x}$$

Παράδειγμα

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

$$r^3 e^{rx} - 3r^2 e^{rx} - re^{rx} + 3e^{rx} = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x}$$

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1 + C_2 + C_3, \\ 2 &= y'(0) = -C_1 + C_2 + 3C_3, \\ 3 &= y''(0) = C_1 + C_2 + 9C_3. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$$

$$r^3e^{rx} - 3r^2e^{rx} - re^{rx} + 3e^{rx} = 0 \Rightarrow r^3 - 3r^2 - r + 3 = 0$$

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{3x}$$

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C_1 + C_2 + C_3, \\ 2 &= y'(0) = -C_1 + C_2 + 3C_3, \\ 3 &= y''(0) = C_1 + C_2 + 9C_3. \end{aligned}$$

$C_1 = -1/4$, $C_2 = 1$ και $C_3 = 1/4$

$$y = \frac{-1}{4}e^{-x} + e^{x} + \frac{1}{4}e^{3x}$$

Παράδειγμα

Λύστε την εξίσωση $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$

Παράδειγμα

Λύστε την εξίσωση $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = 0 \;\Rightarrow\; r(r-1)^3 = 0$$

$$y = \underbrace{(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\, e^x}_{\text{όροι προερχόμενοι από την } r=1} + \underbrace{c_4}_{\text{από την } r=0} .$$

$$(c_0+c_1 x+\cdots+c_{k-1} x^k)\, e^{\alpha x} \cos\beta x+(d_0+d_1 x+\cdots+d_{k-1} x^k)\, e^{\alpha x} \sin\beta x.$$

όπου $c_0, \ldots, c_{k-1}, d_0, \ldots, d_{k-1}$ είναι τυχαίες σταθερές.

Παράδειγμα

Λύστε την εξίσωση $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$

Παράδειγμα

Λύστε την εξίσωση $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$

$$\begin{aligned} r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4 &= 0, \\ (r^2 - 2r + 2)^2 &= 0, \\ \left((r-1)^2 + 1\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

$$y = (c_0 + c_1 x)\, e^x \cos x + (d_0 + d_1 x)\, e^x \sin x.$$