2015-16-B	HY345	Αναγνώριση Προτύπων	1/6/16

Λύσεις Ασκήσεων Μαθήματος (HW)

1A Επιφάνεια Διαχωρισμού ?

Δύο κλάσεις, $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$

$P(\omega_1) = P(\omega_2) = 1/2$

$P(\underline{x}|\omega_1) = \mathcal{N}(\underline{m}_1, \Sigma_1)$

$P(\underline{x}|\omega_2) = \mathcal{N}(\underline{m}_2, \Sigma_2)$

$\Sigma_1 = \Sigma_2 = I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\underline{m}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{m}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Με βάση τα δεδομένα, οι συναρτήσεις διάκρισης είναι οι:

$$g_1(\underline{x}) = \cancel{-\frac{1}{2}\underline{x}^T\underline{x}} + \cancel{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

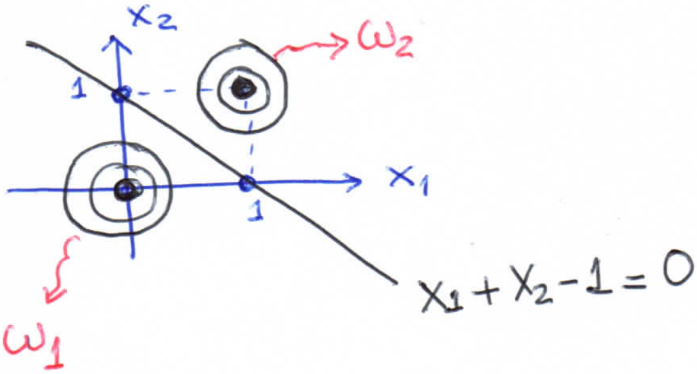
$$g_2(\underline{x}) = \cancel{-\frac{1}{2}\underline{x}^T\underline{x}} + \underbrace{\frac{1}{2}\underline{x}^T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\underline{x}}_{x_1 + x_2}$$

$$- \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{1} + \cancel{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Η επιφάνεια διαχωρισμού προκύπτει ως:

$$g_1(\underline{x}) = g_2(\underline{x}) \Longleftrightarrow \boxed{x_1 + x_2 = 1}, \quad \text{όπου } \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Το διάγραμμά της είναι:



1B $\underline{x} = [x_1\ x_2 \cdots x_L]^T$, $x_i \in \{0, 1\}$

K ΚΛΑΣΕΙΣ ΜΕ PRIORS: $P(\omega_k)$, $k = 1, 2, \ldots, K$

CLASS CONDITIONAL pdfs: $P_{\ell k} = P[x_\ell = 1 \mid \omega_k]$

$\boxed{g_k(\underline{x}) = ?}$

ΥΠΕΡΕΠΙΠΕΔΟ ΑΠΟΦΑΣΗΣ για $K=2$, $P(\omega_1) = P(\omega_2)$, $P_{\ell 1} = p > 1/2, \forall \ell$, $P_{\ell 2} = 1 - p, \forall \ell$

- Εξ ορισμού: $g_k(\underline{x}) = \ln p(\underline{x} \mid \omega_k) + \ln P(\omega_k)$ [1]

Επίσης: $p(\underline{x} \mid \omega_k) \underset{\text{ανεξαρτησία των } x_\ell}{=} \prod_{\ell=1}^{L} P_{\ell k}^{x_\ell} (1 - P_{\ell k})^{1 - x_\ell}$ [2]

Από [1], [2] $\Rightarrow$
$$\boxed{g_k(x) = \left(\sum_{\ell=1}^{L} x_\ell \ln\left[\frac{P_{\ell k}}{1 - P_{\ell k}}\right]\right) + \left(\sum_{\ell=1}^{L} \ln[1 - P_{\ell k}]\right) + \ln P(\omega_k), \quad k = 1, \ldots, K}$$

Διάνυσμα x ταξινομείται στην κλάση k $\boxed{\text{iff}}$ $g_k(\underline{x}) \geq g_j(\underline{x})$, $\forall j \neq k$

- Στην ειδική περίπτωση του 2ου μέρους της εκφώνησης:

$$g_1(\underline{x}) = \left(\sum_{\ell=1}^{L} x_\ell\right) \ln \frac{p}{1-p} + L \cdot \ln(1-p) + \cancel{\ln(1/2)}$$

$$g_2(\underline{x}) = \left(\sum_{\ell=1}^{L} x_\ell\right) \ln \frac{1-p}{p} + L \cdot \ln p + \cancel{\ln(1/2)}$$

Οπότε: $g_1(\underline{x}) \gtrless g_2(x) \Leftrightarrow 2\left(\sum_{\ell=1}^{L} x_\ell\right) \cdot \cancel{\ln \frac{p}{1-p}} \gtrless L \cdot \cancel{\ln \frac{p}{1-p}}$ (>0)

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{\ell=1}^{L} x_\ell \gtrless \frac{L}{2}}$$

1d $p(x|\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$x_1, x_2, \ldots, x_N \sim p(x,\theta) \Rightarrow \hat{\theta}_{ML} = ?$

- Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι:

$$\ell(\theta) = \sum_{n=1}^{N} \ln p(x_n|\theta) = \sum_{n=1}^{N} [-\theta x_n + \ln \theta]$$

$$= N \ln \theta - \theta \sum_{n=1}^{N} x_n$$

- Παραγωγίζοντας ως προς θ κ εξισώνοντας με το μηδέν:

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = \frac{N}{\theta} - \sum_{n=1}^{N} x_n = 0 \Leftrightarrow \boxed{\hat{\theta}_{ML} = \frac{N}{\sum_{n=1}^{N} x_n}}$$

1D $d_{ij}(\underline{x}) = (\underline{m}_i - \underline{m}_j)^T \mathbf{S}^{-1} (\underline{m}_i - \underline{m}_j)$

εάν $p(x|\omega_i) \sim N(\underline{m}_i, \mathbf{S})$ & $p(\underline{x}|\omega_j) \sim N(\underline{m}_j, \mathbf{S})$

- Παρατηρούμε πώς: $\ln \frac{p(x|\omega_i)}{p(x|\omega_j)} =$

$$= -\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{m}_i)^T S^{-1} (\underline{x} - \underline{m}_i) + \frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{m}_j)^T S^{-1} (\underline{x} - \underline{m}_j)$$

$$= x^T \mathbf{S}^{-1} (\underline{m}_i - \underline{m}_j) - \frac{1}{2} \underline{m}_i^T S^{-1} \underline{m}_i + \frac{1}{2} \underline{m}_j^T S^{-1} \underline{m}_j \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} D_{ij}^{(x)} = \int p(x|\omega_i) \ln \frac{p(\underline{x}|\omega_i)}{p(\underline{x}|\omega_j)} = \underline{m}_i^T \underbrace{S^{-1}(\underline{m}_i - \underline{m}_j)}_{const} \underbrace{- \frac{1}{2} \underline{m}_i^T S^{-1} \underline{m}_i + \frac{1}{2} \underline{m}_j^T S^{-1} \underline{m}_j}_{const} \\ D_{ji}^{(x)} = -\int p(x|\omega_j) \ln \frac{p(x|\omega_i)}{p(x|\omega_j)} = -\underline{m}_j^T S^{-1} (\underline{m}_i - \underline{m}_j) + \frac{1}{2} \underline{m}_i^T S^{-1} \underline{m}_i - \frac{1}{2} \underline{m}_j^T S^{-1} \underline{m}_j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{d_{ij}(\underline{x}) = D_{ij}(\underline{x}) + D_{ji}(\underline{x}) = (\underline{m}_i - \underline{m}_j)^T S^{-1} (\underline{m}_i - \underline{m}_j)}$$ ο.ε.δ.

1E

$$\left.\begin{array}{l} s(\underline{x},\underline{y}) > 0 \quad \forall\, \underline{x},\underline{y} \in \underline{X} \\ \text{SILIMARITY METRIC} \end{array}\right\} \Rightarrow d(\underline{x},\underline{y}) = \frac{a}{s(\underline{x},\underline{y})} \quad \xrightarrow{} a>0$$

dissimilarity metric

- Καθώς η $s(\circ,\circ)$ είναι μετρική ομοιότητας, ισχύουν τα ακόλουθα:

① $\exists\, s_0 : \quad 0 < s(\underline{x},\underline{y}) \leq s_0, \quad \forall\, \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{X}$.

↳ από εκφώνηση

② $s(\underline{x},\underline{y}) = s(\underline{y},\underline{x}), \ \forall\, x,y \in \mathbb{X}$

③ $s(\underline{x},\underline{y}) = s_0 \Longleftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$

④ $s(\underline{x},\underline{y})\, s(\underline{y},\underline{z}) \leq [s(\underline{x},\underline{y}) + s(\underline{y},\underline{z})]\, s(\underline{x},\underline{z}), \ \forall\, \underline{x},\underline{y},\underline{z} \in \mathbb{X}$

- Έχουμε, κατά συνέπεια:

$$① \underset{s(\underline{x},\underline{y})>0}{\Rightarrow} \frac{1}{s(\underline{x},\underline{y})} \geq \frac{1}{s_0} \underset{a>0}{\Rightarrow} \frac{a}{s(\underline{x},\underline{y})} \geq \frac{a}{s_0} \Rightarrow \boxed{d(\underline{x},\underline{y}) \geq d_0}$$

με $\boxed{d_0 = a/s_0}$ $\boxed{1}$

$\forall\, \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{X}$

$$② \underset{s(\underline{x},\underline{y})>0}{\Rightarrow} \frac{1}{s(\underline{x},\underline{y})} = \frac{1}{s(\underline{y},\underline{x})} \underset{a>0}{\Rightarrow} \frac{a}{s(\underline{x},\underline{y})} = \frac{a}{s(\underline{y},\underline{x})} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} d(\underline{x},\underline{y}) = d(\underline{y},\underline{x}) \\ \forall\, \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{X} \end{array}}$$ $\boxed{2}$

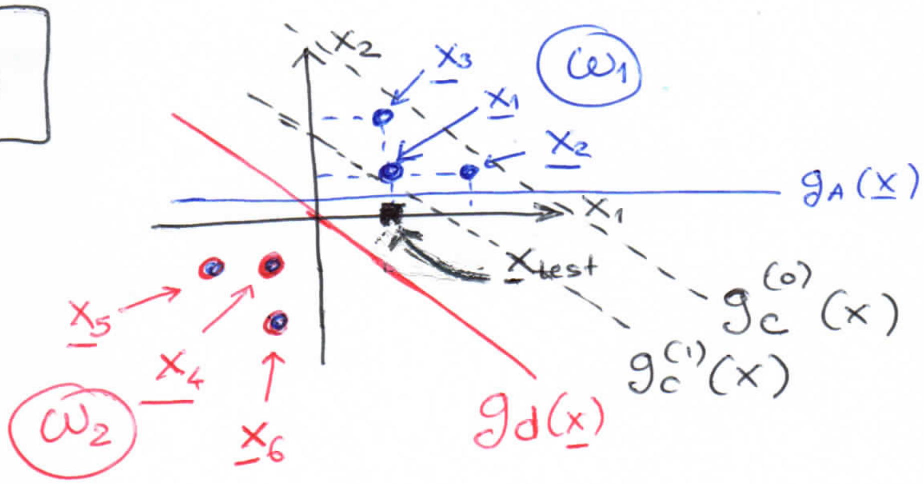
$$\boxed{d(\underline{x},\underline{y}) = d_0} \Leftrightarrow \frac{a}{s(\underline{x},\underline{y})} = \frac{a}{s_0} \Leftrightarrow s(\underline{x},\underline{y}) = s_0 \overset{③}{\Longleftrightarrow} \boxed{\underline{x} = \underline{y}}$$ $\boxed{3}$

$$\boxed{d(\underline{x},\underline{y}) + d(\underline{y},\underline{z}) =} \ \frac{a}{s(x,y)} + \frac{a}{s(y,z)} = \frac{a\,[s(\underline{x},\underline{y}) + s(\underline{y},\underline{z})]}{s(\underline{x},\underline{y})\, s(\underline{y},\underline{z})} \overset{④}{\geq}$$

$$\underset{s(\circ,\circ)>0,\ a>0}{\geq} \frac{a\, \cancel{s(\underline{x},\underline{y})}\, \cancel{s(\underline{y},\underline{z})}}{\cancel{s(\underline{x},\underline{y})}\, \cancel{s(\underline{y},\underline{z})}\, s(\underline{x},\underline{z})} = \frac{a}{s(\underline{x},\underline{z})} = \boxed{d(\underline{x},\underline{z})}$$ $\boxed{4}$

- Από $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4} \Rightarrow d(\underline{x},\underline{y})$ είναι dissimilarity metric (οεδ)

2(A)



- Προφανώς, οι κλάσεις είναι διαχωρίσιμες γραμμικά.

- Η εξίσωση: $\boxed{x_2 = 0.5} \iff g_A(\underline{x}): 0\,x_1 + 1\,x_2 - \frac{1}{2} = 0 \iff \underline{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

επιτυγχάνει το ζητούμενο, γιατί

$g_A(\underline{x}) > 0$, για $\underline{x} = \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$

$g_A(\underline{x}) < 0$, για $\underline{x} = \underline{x}_4, \underline{x}_5, \underline{x}_6$

& $g_A(\underline{x}_{test}) < 0 \Rightarrow \boxed{\underline{x}_{test} \in \omega_2}$

2(B)

Έστω απόσταση L_1 (Manhattan distance).

Τότε:

$$\left.\begin{aligned} d(\underline{x}_{test}, \underline{x}_1) &= 1 \\ d(\underline{x}_{test}, \underline{x}_2) &= 2 \\ d(\underline{x}_{test}, \underline{x}_3) &= 2 \\ d(\underline{x}_{test}, \underline{x}_4) &= 3 \\ d(\underline{x}_{test}, \underline{x}_5) &= 4 \\ d(\underline{x}_{test}, \underline{x}_6) &= 4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\min}$$

$\underline{x}_{test}$ λαμβάνει ίδια ταξινόμηση με $\underline{x}_1$

$\Rightarrow \boxed{x_{test} \in \omega_1}$

2c

$\underline{w}[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -15/4 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow g_c^{(0)}(\underline{x}):\ x_1 + x_2 - \frac{15}{4} = 0$

$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3:\ g_c^{(0)}(\underline{x}) < 0 \longrightarrow$ λάθος ταξινόμηση

($\underline{x}_1 \to -7/4$, $\underline{x}_2, \underline{x}_3 \to -3/4$)

$\underline{x}_4, \underline{x}_5, \underline{x}_6:\ g_c^{(0)}(\underline{x}) < 0 \longrightarrow$ OK! (σωστή ταξινόμηση)

Άρα: $\underline{w}[1] = \underline{w}[0] + \rho(\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \underline{x}_3) =$

$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -15/4 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

Άρα: $\boxed{g_c^{(1)}(\underline{x}):\ 2x_1 + 2x_2 - 3 = 0}$ ← ΤΕΛΙΚΗ

$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3:\ g_c^{(1)}(\underline{x}) > 0$ OK!

$\underline{x}_4, \underline{x}_5, \underline{x}_6:\ g_c^{(1)}(\underline{x}) < 0$ OK!

Το: $\underline{x}_{test}$ δίνει $g_c^{(1)}(\underline{x}_{test}) < 0 \rightsquigarrow \boxed{\in \omega_2}$

2D

Είναι προφανές ότι η $g_d(\underline{x})$ (σχεδιασμένη σε προηγούμενη σελίδα) επιτυγχάνει το max margin διαχωρισμού:

$\boxed{g_d(\underline{x}):\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 0 = 0} \Longleftrightarrow \underline{w} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

με support vectors τα $[1, 1]^T$, $[-1, -1]^T$ (δίνει $g_d(\underline{x}_1), g_d(\underline{x}_4) = \pm 1$)

- Παρατήρηση: $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \underbrace{y_1}_{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \underbrace{y_4}_{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boxed{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0}$

  που ικανοποιείται με $\boxed{\lambda_1 = \lambda_4 = 1/4}$

- Επίσης: $[w_1\ w_2]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + w_0 = 1 \Leftarrow w_0 = 0$

  Ισοδύναμα: $[\underbrace{w_1}_{1/2}, \underbrace{w_2}_{1/2}]\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + w_0 = -1 \Leftarrow w_0 = 0$

- Περιθώριο: $\frac{2}{\|w\|} = \frac{2}{\sqrt{2}\ 1/2} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ ← MARGIN

- Τέλος, $\boxed{x_{test} \in \omega_1}$

2E

• Μέση τιμή δειγμάτων: $\underline{m} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \underline{x}_i = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

• Εύρεση πίνακα $\underline{X}\underline{X}^T$, όπου $X = [\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_6] = \begin{bmatrix}1&2&1&-1&-2&-1\\1&1&2&-1&-1&-2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow XX^T = \begin{bmatrix}12&10\\10&12\end{bmatrix} \Rightarrow$ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ: $(12-\lambda)^2 - 10^2 = 0$

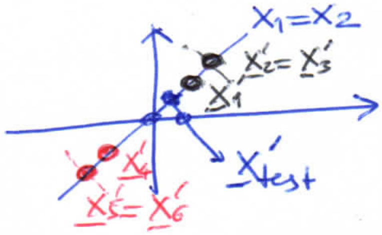
$\Leftrightarrow (12-\lambda-10)(12-\lambda+10) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \underline{22}$

↑ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ

ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ:

$\begin{bmatrix}12&10\\10&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \overset{\lambda_2}{22}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}12x_1 + 10x_2 = 22x_1\\10x_1 + 12x_2 = 22x_2\end{matrix} \Leftrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

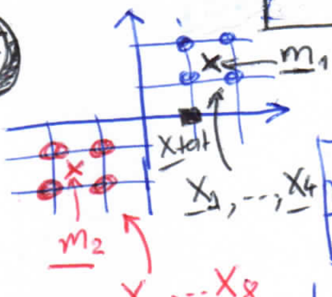
ΠΡΟΒΟΛΕΣ:



Προφανώς, με χρήση NN:

$\boxed{x_{test} \in \omega_1}$

2F



Βρίσκουμε τις μέσες τιμές & συνδιασπορές

$\boxed{\hat{\underline{m}}_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \underline{x}_i} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1+2+1+2\\1+1+2+2\end{bmatrix} = \frac{6}{4}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\3/2\end{bmatrix}$

$\boxed{\hat{m}_2 = \frac{1}{4}\sum_{i=5}^{8} \underline{x}_i} = \begin{bmatrix}-3/2\\-3/2\end{bmatrix}$

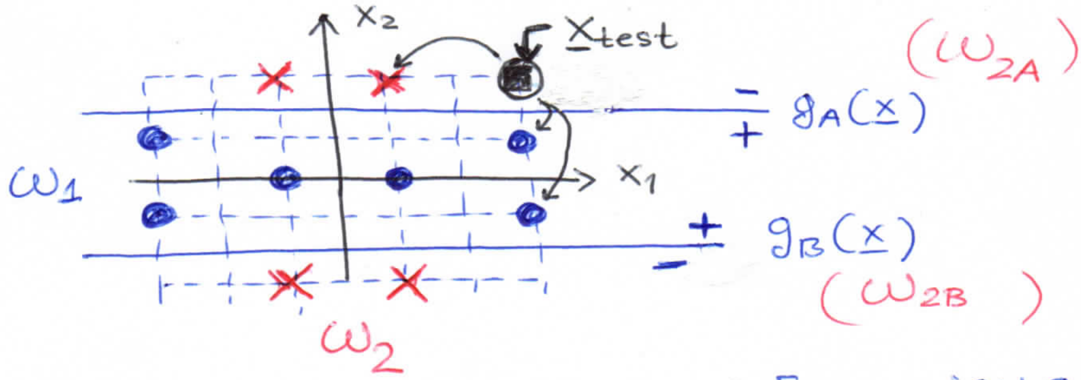
$\hat{\Sigma}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-0.5&-0.5&+0.5&+0.5\\-0.5&+0.5&-0.5&+0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.5&-0.5\\-0.5&+0.5\\+0.5&-0.5\\+0.5&+0.5\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3&0\\0&1/3\end{bmatrix}$

$\hat{\Sigma}_2 = \hat{\Sigma}_1 = 1/3\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (1)

$\hat{P}(\omega_1) = \hat{P}(\omega_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ (2)

Από (1) & (2) έχουμε ταξινόμηση με βάση Ευκλείδια απόσταση από $\hat{m}_1, \hat{m}_2$ (ισοδύναμα, μπορεί κανείς να βρει την επιφάνεια διαχωρισμού: $x_1 + x_2 = 0$) $\Longrightarrow \boxed{x_{test} \in \omega_1}$

3A



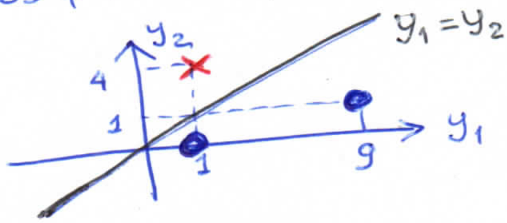
• Προφανώς, οι κλάσεις δεν είναι γραμμικά διαχωρίσιμες

3B

Τα <u>τρία</u> κοντινότερα δείγματα εκπαίδευσης του $\underline{x}_{test}$ δίνονται στο παραπάνω σχήμα (με τα βέλη).
Από αυτά, <u>δύο</u> ανήκουν στην ω_1 & <u>ένα</u> στην ω_2.
Άρα $\boxed{\underline{x}_{test} \in \omega_1}$

3D

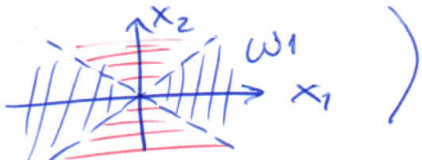
• Έστω ο καινούργιος χώρος των y_1, y_2 με $\boxed{y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2^2}$
Τα <u>δέκα</u> σημεία εκπαίδευσης αντιστοιχίζονται στον χώρο αυτόν σε 3 μόνο σημεία, ως φαίνεται στο σχήμα:



Παρατηρούμε ότι οι κλάσεις είναι πλέον γραμμικά διαχωρίσιμες, πχ από την ευθεία: $y_1 - y_2 = 0$

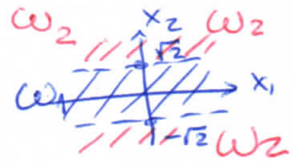
ή στον αρχικό χώρο: $\boxed{x_1^2 - x_2^2 = 0}$

(ισοδύναμα $x_1 = \pm x_2$ δηλ:



)

οπότε $\boxed{\underline{x}_{test} \in \omega_1}$



• Εναλλακτικά, ο ταξινομητής $\boxed{-x_2^2 + 2 = 0}$
($\underline{x}_{test} \in \omega_2$)

$\boxed{3C}$

- Ακολουθούμε τη μεθοδολογία της Ενότητας 4.3 του Βιβλίου, θεωρώντας τις ευθείες διάκρισης (βλέπε σχήμα προηγούμενης σελίδας):

$$g_A(\underline{x}) = -x_2 + \frac{3}{2} = 0, \quad \text{δηλ: } \underline{w}_A = [0, -1, 3/2]^T$$

$$g_B(\underline{x}) = x_2 + \frac{3}{2} = 0, \quad \text{δηλ: } \underline{w}_B = [0, 1, 3/2]^T$$

που ορίζουν τα αντίστοιχα perceptrons (ενός επιπέδου). Ορίζοντας ως τις εξόδους τους τα $y_1 = perc_A(\underline{x})$, $y_2 = perc_B(\underline{x})$ έχουμε

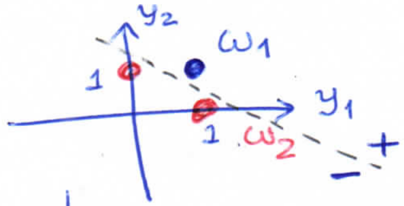
$$\underline{x} \in \omega_1 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 1$$

$$\underline{x} \in \omega_{2A} \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 1$$

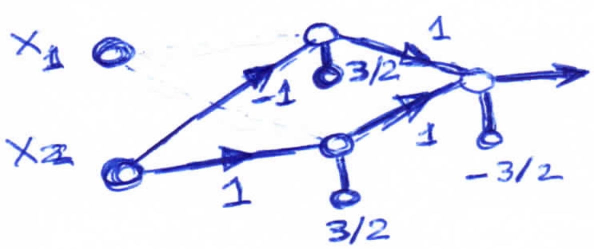
$$\underline{x} \in \omega_{2B} \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 0$$

στον χώρο των $[y_1, y_2]^T = \underline{y}$

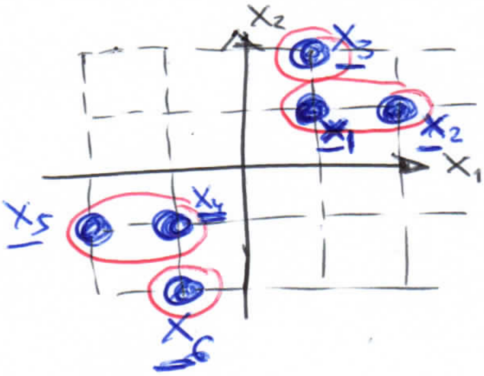
οπότε έχουμε 3 σημεία στον χώρο των που είναι γραμμικά διαχωρίσιμα από την $g(\underline{y}) = y_1 + y_2 - \frac{3}{2} = 0$ δίνοντας σο 2^o επίπεδο του perceptron



- Συνολικά λοιπόν, έχουμε σχηματικά:



4A

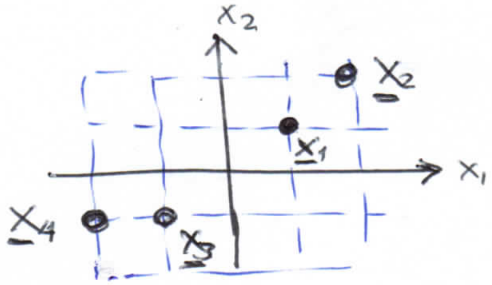


$\Rightarrow$ BSAS CLUSTERING (L_1 distance, $\theta = 1.25$)

ΒΗΜΑ	ΟΜΑΔΕΣ / ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ
1:	$\{\underline{x}_1\}$
2:	$\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}$, καθώς $d(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = 1 < \theta$ ΜΕΣΟ $\underline{c}_1 = [1.5, 1.0]^T$
3:	$\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}, \{\underline{x}_3\}$ καθώς $d(\underline{x}_3, \underline{c}_1) = 1.5 > \theta$
4:	$\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}, \{\underline{x}_3\}, \{\underline{x}_4\}$ καθώς $d(\underline{x}_4, \underline{x}_3) = 5 > \theta$ & $d(\underline{x}_4, \underline{c}_1) = 4.5 > \theta$
5:	$\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}, \{\underline{x}_3\}, \{\underline{x}_4, \underline{x}_5\}$ καθώς $d(\underline{x}_4, \underline{x}_5) = 1 < \theta$ & $d(\underline{x}_5, \underline{x}_3) > \theta$, $d(\underline{x}_5, \underline{c}_1) > \theta$ ΜΕΣΟ $\underline{c}_2 = \frac{\underline{x}_4 + \underline{x}_5}{2} = [-1.5, -1.0]^T$
6:	$\boxed{\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}, \{\underline{x}_3\}, \{\underline{x}_4, \underline{x}_5\}, \{\underline{x}_6\}}$ καθώς $d(\underline{x}_6, \underline{c}_1), d(\underline{x}_6, \underline{c}_2), d(\underline{x}_6, \underline{x}_3) > \theta$

Άρα έχουμε $\boxed{\text{4 ΟΜΑΔΕΣ}}$

4B



$\Rightarrow$ AGGLOMERATIVE CLUSTERING

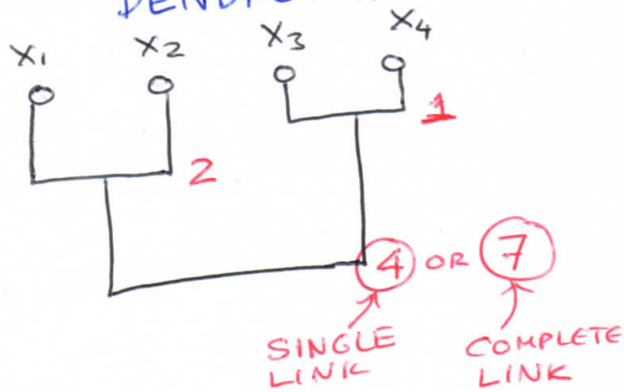
$\mathcal{L}_1$ DISTANCE

SINGLE/COMPLETE-LINK

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	2	4	5
x_2	2	0	6	7
x_3	4	6	0	1
x_4	5	7	1	0

DENDROGRAMS



$\{x_3, x_4\}$

SINGLE LINK

	x_1	x_2	$x_3 x_4$
x_1	0	2	4
x_2	2	0	6
$x_3 x_4$	4	6	0

$\{x_1, x_2\}$

	$x_1 x_2$	$x_3 x_4$
$x_1 x_2$	0	4
$x_3 x_4$	4	0

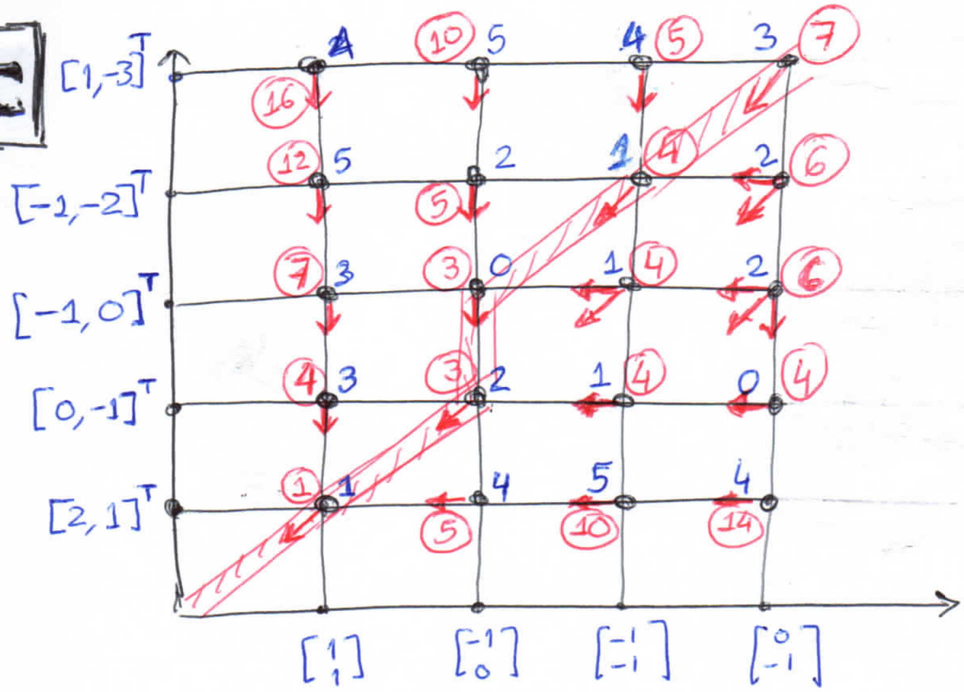
COMPLETE LINK

	x_1	x_2	$x_3 x_4$
x_1	0	2	5
x_2	2	0	7
$x_3 x_4$	5	7	0

	$x_1 x_2$	$x_3 x_4$
$x_1 x_2$	0	7
$x_3 x_4$	7	0

$\{x_1\ x_2\ x_3\ x_4\}$

4c



- Συνολικό κόστος είναι 7 με το επισημειωμένο μονοπάτι με κόκκινο
- Έχουμε υπολογίσει όλες τις αποστάσεις $d(\underline{x},\underline{y})$ στο πλέγμα (με μπλέ).
- Επίσης, για κάθε σημείο του πλέγματος, το ελάχιστο κόστος μετάβασης στον κόμβο (με κόκκινο) και την κατεύθυνση της μετάβασης αυτής (από πού "έρχεται" το ελαχίστου κόστους μονοπάτι).