Π.Θ., ΤΗΜΜΥ — ΗΥ 345: ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ — Ακ. Έτος 2015-16

Ημ/νία: 23-04-2016 — **Σετ Ασκήσεων** — Παράδοση: 01-06-2016

Η παράδοση των ασκήσεων θα γίνει στην αρχή του μαθήματος της Τετάρτης 1ης Ιουνίου. Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι **ατομικές** και ότι συνεισφέρουν **8%** του τελικού βαθμού.

Άσκηση 1: Τα παρακάτω είναι ανεξάρτητα ερωτήματα:

(a) Βρείτε την εξίσωση που περιγράφει την επιφάνεια διαχωρισμού (και σχεδιάστε την) στο πρόβλημα Bayesian ταξινόμησης δύο ισοπίθανων κλάσεων με βάση 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών $\mathbf{x}$ που ακολουθούν 2-D κανονικές κατανομές για κάθε κλάση (class conditional pdfs) με κοινό πίνακα συνδιασποράς (covariance matrix) τον μοναδιαίο διαγώνιο πίνακα $\mathbf{I}$ και διανύσματα μέσων τιμών $\mathbf{m}_1 = [\,0\,,0\,]^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{m}_2 = [\,1\,,1\,]^{\mathrm{T}}$.

(b) Έστω πολυδιάστατα διανύσματα χαρακτηριστικών $\mathbf{x} = [\,x_1\,,x_2\,,...,x_L\,]^{\mathrm{T}}$ με στατιστικά ανεξάρτητα στοιχεία (statistically independent components) που παίρνουν δυαδικές τιμές (δηλ. $x_l = 0$ ή 1, για $l = 1\,,2\,,...,L$). Τα διανύσματα αυτά χρησιμοποιούνται για την ταξινόμηση σε K κλάσεις, $\omega_1\,,\omega_2\,,...,\omega_K$, με εκ των προτέρων πιθανότητες (prior probabilities) $P(\omega_k)$, $k = 1\,,2\,,...,K$. Έστω επίσης ότι οι υπό συνθήκη (class conditional) πιθανότητες δίνονται από τις

$$P_{l\,k} = P\,[\,x_l = 1\,|\,\omega_k\,] \quad , \quad \text{για} \quad l = 1\,,2\,,...,L \quad \text{και} \quad k = 1\,,2\,,...,K \quad .$$

Βρείτε τη μορφή της συνάρτησης διάκρισης (κανόνα ταξινόμησης) $g_k(\mathbf{x})$ σύμφωνα με την θεωρία αποφάσεων κατά Bayes.

Βρείτε επίσης πώς αυτή απλοποιείται σε μία απλή συνάρτηση του αθροίσματος $\sum_{l=1}^{L} x_l$, γράφοντας την εξίσωση που περιγράφει το υπερεπίπεδο απόφασης, για την ειδική περίπτωση δύο ισοπίθανων κλάσεων, δηλ. $K = 2$ και $P(\omega_1) = P(\omega_2) = 1/2$, και με ίσες υπό συνθήκη πιθανότητες για όλα τα στοιχεία του διανύσματος χαρακτηριστικών, δηλ. $P_{l\,1} = p > 1/2$, και $P_{l\,2} = 1 - p$, για $l = 1\,,2\,,...,L$.

(c) Βρείτε τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood estimator) της παραμέτρου $\theta > 0$ της εκθετικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας,

$$p\,(\,x\,|\,\theta\,) \;=\; \begin{cases} \theta\, e^{-\,\theta\, x}\,, & x \,\geq\, 0 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases} \quad ,$$

με βάση N στατιστικά ανεξάρτητα δείγματά της x_n, $n = 1\,,2\,,...,N$.

(d) Έστω η απόκλιση (Kullback-Leibler divergence) $d_{ij}(\mathbf{x})$ ενός διανύσματος χαρακτηριστικών $\mathbf{x} = [\,x_1\,,\,x_2\,,...\,,\,x_L\,]^{\mathrm{T}}$ ως προς κλάσεις ω_i, ω_j (εξίσωση (5.21) του βιβλίου). Αποδείξτε ότι για πολυδιάστατες κανονικές κατανομές για κάθε κλάση (multivariate Gaussian class conditional pdfs) με κοινό πίνακα συνδιασποράς $\mathbf{S}$ και διανύσματα μέσων τιμών $\mathbf{m}_k$ (για $k = i, j$), η απόκλιση ισούται με την απόσταση Mahalanobis μεταξύ των αντίστοιχων διανυσμάτων μέσων τιμών, δηλ. $d_{ij}(\mathbf{x}) = (\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_j)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{S}^{-1}\,(\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_j)$.

(e) Έστω s μία μετρική ομοιότητας (similarity metric) ορισμένη στο σύνολο X, για την οποία ισχύει $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Αποδείξτε ότι η d, που ορίζεται ως

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{a}{s(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \quad , \quad \text{με} \quad a > 0$$

είναι μετρική ανομοιότητας (dissimilarity metric) στο σύνολο X.

Άσκηση 2: Έστω δύο κλάσεις ω_1 και ω_2 με τα ακόλουθα 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών εκπαίδευσης (τρία για κάθε κλάση, γραμμένα σε μορφή $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$):

$$\omega_1 : \quad [1, 1]^{\mathrm{T}}, \quad [2, 1]^{\mathrm{T}}, \quad [1, 2]^{\mathrm{T}}$$

$$\omega_2 : \quad [-1, -1]^{\mathrm{T}}, \quad [-2, -1]^{\mathrm{T}}, \quad [-1, -2]^{\mathrm{T}} .$$

Έστω επίσης και ένα διάνυσμα δοκιμής $\mathbf{x}_{\text{test}} = [1, 0]^{\mathrm{T}}$.

(a) Σχεδιάστε τα παραπάνω διανύσματα στο 2-D χώρο με άξονες τα x_1, x_2. Είναι οι κλάσεις γραμμικά διαχωρίσιμες (με βάση τα διανύσματα εκπαίδευσης); Αν ναι, δώστε μία συνάρτηση διάκρισης $g(\mathbf{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_0$ με διάνυσμα συντελεστών $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_0]^{\mathrm{T}}$, που διαχωρίζει τις δύο κλάσεις με $g(\mathbf{x}) > 0$ για $\mathbf{x} \in \omega_1$ και $g(\mathbf{x}) < 0$ για $\mathbf{x} \in \omega_2$ (για τα διανύσματα εκπαίδευσης) και που ταξινομεί το διάνυσμα δοκιμής στην κλάση ω_2.

(b) Ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής με βάση τον κανόνα του πλησιέστερου γείτονα (1-NN), χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε μέτρο απόστασης μεταξύ διανυσμάτων στον δυδιάστατο χώρο επιθυμείτε.

(c) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με βάση τον αλγόριθμο perceptron (σε μορφή batch), αρχικοποιώντας τον αλγόριθμο με τιμές $\mathbf{w}(0) = [1, 1, -15/4]^{\mathrm{T}}$ και χρησιμοποιώντας βήμα $\rho = 1/4$. Σχεδιάστε την και ταξινομήστε το $\mathbf{x}_{\text{test}}$ με αυτήν. Σημείωση: Ο συμβολισμός της $g(\mathbf{x})$ και τα πρόσημα επιλογής των κλάσεων είναι όπως στο υπο-ερώτημα (a).

(d) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με βάση την μέθοδο των μηχανών διανυσματικής στήριξης (support vector machines), εκφράζοντας το διάνυσμα $[w_1, w_2]^{\mathrm{T}}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων στήριξης (support vectors) και στη συνέχεια βρίσκοντας και το w_0. Ποιο είναι το περιθώριο (margin) μεταξύ των κλάσεων που επιτυγχάνει ο αλγόριθμος; Σχεδιάστε την συνάρτηση διάκρισης και ταξινομήστε το $\mathbf{x}_{\text{test}}$ με αυτήν.

(e) Μειώστε την διάσταση των δεδομένων από δύο σε μία χρησιμοποιώντας ανάλυση κύριων συνιστωσών (Principal Component Analysis – PCA). Βρείτε τις προβολές των διανυσμάτων εκπαίδευσης στον μονοδιάστατο χώρο που προκύπτει, και διαπιστώστε αν οι κλάσεις είναι γραμμικά διαχωρίσιμες σε αυτόν τον χώρο ή όχι. Αν ναι, ταξινομήστε το παράδειγμα δοκιμής στην κατάλληλη κλάση, με βάση τον κανόνα του πλησιέστερου γείτονα (1-NN) στον μονοδιάστατο χώρο που προκύπτει.

(f) Προσθέστε τώρα δύο ακόμη σημεία στο σύνολο εκπαίδευσης, συγκεκριμένα το $[\,2\,,2\,]^{\mathrm{T}}$ στην κλάση ω_1 και το $[\,-2\,,-2\,]^{\mathrm{T}}$ στην κλάση ω_2 (συνεπώς έχουμε 4 σημεία εκπαίδευσης για κάθε κλάση). Υπολογίστε με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας κανονικές κατανομές (2-D Gaussian) για τις υπό συνθήκη συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $p(\,\mathbf{x}\,|\,\omega_1\,)$ και $p(\,\mathbf{x}\,|\,\omega_2\,)$. Στη συνέχεια ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής, $\mathbf{x}_{\text{test}}$, με βάση τη θεωρία αποφάσεων του Bayes.

Άσκηση 3: Έστω δύο κλάσεις ω_1 και ω_2 με τα ακόλουθα 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών εκπαίδευσης (γραμμένα σε μορφή $\mathbf{x} = [\,x_1\,, x_2\,]^{\mathrm{T}}$):

$$\omega_1: \ [\,1\,,0\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,-1\,,0\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,3\,,1\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,-3\,,1\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,3\,,-1\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,-3\,,-1\,]^{\mathrm{T}}\ ,$$

$$\omega_2: \ [\,1\,,2\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,1\,,-2\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,-1\,,2\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,-1\,,-2\,]^{\mathrm{T}}\,.$$

Έστω επίσης και ένα διάνυσμα δοκιμής $\mathbf{x}_{\text{test}} = [\,3\,,2\,]^{\mathrm{T}}$.

(a) Σχεδιάστε τα παραπάνω διανύσματα στο 2-D χώρο με άξονες τα x_1, x_2. Είναι οι κλάσεις γραμμικά διαχωρίσιμες (με βάση τα διανύσματα εκπαίδευσης);

(b) Ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής με βάση τον κανόνα των τριών πλησιέστερων γειτόνων (3-NN), χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια απόσταση (L_2) μεταξύ διανυσμάτων.

(c) Κατασκευάστε ένα perceptron δύο επιπέδων που να ταξινομεί τα διανύσματα εκπαίδευσης σωστά στις δύο κλάσεις. Σε ποια κλάση ταξινομείται το διάνυσμα δοκιμής $\mathbf{x}_{\text{test}}$;

(d) Κατασκευάστε (και σχεδιάστε) έναν πολυωνυμικό ταξινομητή που να ταξινομεί τα διανύσματα εκπαίδευσης σωστά στις δύο κλάσεις και ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής με αυτόν. Επίσης, σχεδιάστε τις περιοχές απόφασης για κάθε κλάση στον αρχικό χώρο.

Άσκηση 4: Τα παρακάτω είναι ανεξάρτητα ερωτήματα:

(a) Έστω τα έξι παρακάτω διανύσματα εκπαίδευσης τα οποία παρουσιάζονται στο βασικό ακολουθιακό αλγοριθμικό σχήμα ομαδοποίησης (BSAS) με την ακόλουθη σειρά:

$\mathbf{x}_1 = [\,1\,,1\,]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_2 = [\,2\,,1\,]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_3 = [\,1\,,2\,]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_4 = [\,-1\,,-1\,]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_5 = [\,-2\,,-1\,]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_6 = [\,-1\,,-2\,]^{\mathrm{T}}$.

Ομαδοποιήστε τα διανύσματα αυτά με βάση τον αλγόριθμο BSAS, χρησιμοποιώντας την απόσταση L_1 (Manhattan distance), κατώφλι $\theta = 1.25$, και θεωρώντας ότι οι αντιπρόσωποι των ομάδων που προκύπτουν είναι η μέση τιμή των μελών της ομάδας.

(b) Έστω διανύσματα εκπαίδευσης:

$$\mathbf{x}_1 = [\,1\,,1\,]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x}_2 = [\,2\,,2\,]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x}_3 = [\,-1\,,-1\,]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{x}_4 = [\,-2\,,-1\,]^{\mathrm{T}}.$$

Ομαδοποιήστε τα ιεραρχικά, χρησιμοποιώντας τον συσσωρευτικό αλγόριθμο ομαδοποίησης (agglomerative clustering) με βάση την απόσταση L_1 (Manhattan distance). Χρησιμοποιείστε δύο διαφοροποιήσεις του αλγορίθμου, όσον αφορά την ενημέρωση των αποστάσεων του πίνακα ανομοιότητας, τον πρώτο με βάση τον αλγόριθμο απλού δεσμού (single link), και τον δεύτερο με βάση τον αλγόριθμο πλήρους δεσμού (complete link). Και στις δύο περιπτώσεις σχεδιάστε τα δεντρογράμματα ανομοιότητας (dendrograms) που προκύπτουν.

(c) Υπολογίστε με διαδικασία δυναμικής χρονικής στρέβλωσης (dynamic time warping) το κόστος σύγκρισης μεταξύ της ακολουθίας τεσσάρων 2-D χαρακτηριστικών (πρότυπο αναφοράς)

$$X = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & -1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

και της ακολουθίας πέντε 2-D χαρακτηριστικών (υπό εξέταση πρότυπο)

$$Y = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 & -1.0 & -1.0 & 1.0 \\ 1.0 & -1.0 & 0.0 & -2.0 & -3.0 \end{bmatrix}$$

υπό τοπικούς περιορισμούς μετάβασης Sakoe-Chiba (σχήμα 7.11.α) του βιβλίου, κόστος σύγκρισης διανυσμάτων την απόσταση L_1 (Manhattan distance), και περιορισμούς άκρων που απαιτούν το βέλτιστο μονοπάτι να διέρχεται από τον αρχικό και τον τελικό κόμβο που αποτελούνται από τα ζεύγη των πρώτων και τελευταίων διανυσμάτων των προτύπων αναφοράς και δοκιμής, αντίστοιχα.
