ΗΥ 345 : ΛΥΣΕΙΣ HOMEWORK 17/06/14

Ακ Ετος 2013-2014

1a Έστω οι δύο κλάσεις, ω_1 κ ω_2 με

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = 1/2$$

$$P(\underline{x}|\omega_1) \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \mathbb{I}_{2\times2}\right)$$

$$P(\underline{x}|\omega_2) \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \mathbb{I}_{2\times2}\right)$$

Τότε οι συναρτήσεις διάκρισης είναι οι:

$$g_1(\underline{x}) = \cancel{-\frac{1}{2}\underline{x}^T\underline{x}} + \cancel{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

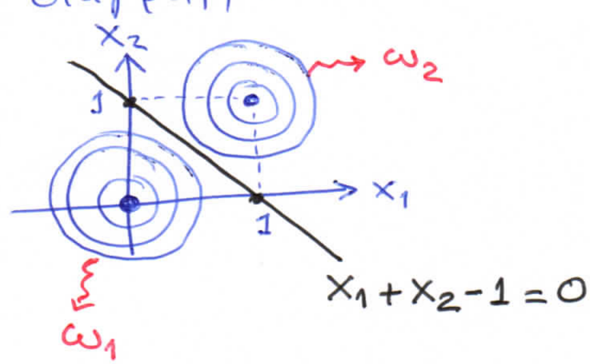
$x_1 + x_2$

$$g_2(\underline{x}) = \cancel{-\frac{1}{2}\underline{x}^T\underline{x}} + \frac{1}{2}\underline{x}^T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}[1\ 1]\,\underline{x}$$
$$\underbrace{-\frac{1}{2}[1\ 1]\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}_{1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \cancel{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Η επιφάνεια διαχωρισμού προκύπτει ως:

$$g_1(\underline{x}) = g_2(\underline{x}) \iff x_1 + x_2 = 1$$

Το διάγραμμα είναι:



(1b). Εκφράζουμε το loglikelihood των N ανεξάρτητων δειγμάτων που ακολουθούν την $p(x|\theta)$ ως:

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{n=1}^{N} \ln p(x_n|\theta) =$$

$$= 2N \ln\theta + \sum_{n=1}^{N} \ln x_n - \theta \sum_{n=1}^{N} x_n$$

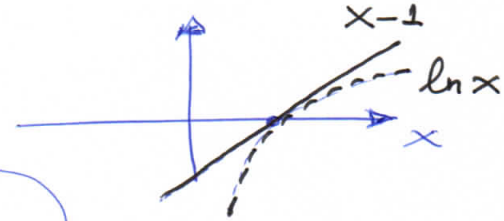
$$\Longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{2N}{\theta} - \sum_{n=1}^{N} x_n$$

- Θέτοντας την παράγωγο ίση με το μηδέν παίρνουμε $\dfrac{2N}{\hat{\theta}_{ML}} = \sum_{n=1}^{N} x_n \Longleftrightarrow \boxed{\hat{\theta}_{ML} = \dfrac{2}{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n}}$

- Το σημείο $\hat{\theta}_{ML}$ προφανώς αποτελεί σημείο μεγίστου.

1c Χρησιμοποιούμε τη γνωστή ιδιότητα

$$\boxed{\ln(x) \le x-1}$$



οπότε βλέπουμε πως:

$$D_{ij} = -\int p(\underline{x}|\omega_i)\ln\frac{p(\underline{x}|\omega_j)}{p(\underline{x}|\omega_i)}\,d\underline{x}$$

$$\ge -\int p(\underline{x}|\omega_i)\left(\frac{p(\underline{x}|\omega_j)}{p(\underline{x}|\omega_i)}-1\right)d\underline{x}$$

$$= -\int p(\underline{x}|\omega_j)\,d\underline{x} + \int p(\underline{x}|\omega_i)\,d\underline{x}$$

$$= -1+1 = 0$$

Παρόμοια, $D_{ji} \ge 0$

Κατά συνέπεια $d_{ij} = D_{ij} + D_{ji} \ge 0$

1d

Καθόσον η $s(\cdot,\cdot)$ είναι <u>μετρική ομοιότητας</u> ισχύουν τα κάτωθι:

① $\exists\, s_0 : 0 < s(\underline{x},\underline{y}) \leq s_0 \quad , \forall\, \underline{x},\underline{y} \in \mathcal{X}$

↳ από την εκφώνηση

② $s(\underline{x},\underline{y}) = s(\underline{y},\underline{x}), \quad \forall\, \underline{x},\underline{y} \in \mathcal{X}$

③ $s(\underline{x},\underline{y}) = s_0 \Longleftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$

④ $s(\underline{x},\underline{y})s(\underline{y},\underline{z}) \leq [s(\underline{x},\underline{y}) + s(\underline{y},\underline{z})]s(\underline{x},\underline{z})$

$\forall\, \underline{x},\underline{y},\underline{z} \in \mathcal{X}$

Καθώς η $f(\cdot)$ είναι μονοτονικά φθίνουσα & θετική:

• ① $\Rightarrow s(\underline{x},\underline{y}) \leq s_0 \Longrightarrow \underbrace{f(s(\underline{x},\underline{y}))}_{= d(\underline{x},\underline{y})} \geq \underbrace{f(s_0)}_{\equiv d_0}$

$\Longrightarrow \boxed{d(\underline{x},\underline{y}) \geq d_0 \equiv f(s_0)}, \quad \forall\, \underline{x},\underline{y} \in \mathcal{X}$

• ② $\Rightarrow s(\underline{x},\underline{y}) = s(\underline{y},\underline{x}) \Longrightarrow f(s(\underline{x},\underline{y})) = f(s(\underline{y},\underline{x}))$

$\Longrightarrow \boxed{d(\underline{x},\underline{y}) = d(\underline{y},\underline{x})} \quad \forall\, \underline{x},\underline{y} \in \mathcal{X}$

• $d(\underline{x},\underline{y}) = d_0 \Longleftrightarrow f(s(\underline{x},\underline{y})) = f(s_0)$

$\underset{\text{μονοτονική}}{\Longleftrightarrow} s(\underline{x},\underline{y}) = s_0 \overset{③}{\Longleftrightarrow} \underline{x} = \underline{y}$

1d – ΣΥΝΕΧΕΙΑ

$f(\cdot)$ μονοτονικά φθίνουσα
ΚΣ
θετική

• ④ $\Rightarrow s(\underline{x},\underline{z}) \geq \dfrac{1}{\dfrac{1}{s(\underline{x},\underline{y})}+\dfrac{1}{s(\underline{y},\underline{z})}} \Longrightarrow$

$s(\cdot,\cdot)$ θετική

$$\Rightarrow f(s(\underline{x},\underline{z})) \leq f\left(\frac{1}{\frac{1}{s(x,\underline{y})}+\frac{1}{s(\underline{y},\underline{z})}}\right) \leq$$

από εκφώνηση

$$\leq f(s(\underline{x},\underline{y})) + f(s(\underline{y},\underline{z}))$$

$$\Longrightarrow \boxed{d(\underline{x},z) \leq d(\underline{x},\underline{y}) + d(\underline{y},\underline{z})}$$

Άρα αποδείξαμε τις 4 απαραίτητες ιδιότητες για να είναι η $d(\cdot,\cdot)$ μετρική ανομοιότητας.