Π.Θ., ΤΗΜΜΥ ΗΥ 345: ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ Ακ. Έτος 2013-14
Ημ/νία: 13-05-2014 **Σετ Ασκήσεων** Παράδοση: TBA

Ο τρόπος και ημερομηνία παράδοσης των ασκήσεων θα ανακοινωθεί έγκαιρα. Υπολογίζεται ότι το σετ θα είναι παραδοτέο περί τις **13-06-2014**. Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι **ατομικές** και ότι συνεισφέρουν **8%** του τελικού βαθμού.

Άσκηση 1: Τα παρακάτω είναι ανεξάρτητα ερωτήματα:

(a) Βρείτε την εξίσωση που περιγράφει την επιφάνεια διαχωρισμού (και σχεδιάστε την) στο πρόβλημα Bayesian ταξινόμησης δύο ισοπίθανων κλάσεων με βάση 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών $\mathbf{x}$ που ακολουθούν 2-D κανονικές κατανομές για κάθε κλάση (class conditional pdfs) με κοινό πίνακα συνδιασποράς (covariance matrix) τον μοναδιαίο διαγώνιο πίνακα $\mathbf{I}$ και διανύσματα μέσων τιμών $\mathbf{m}_1 = [\,0\,,0\,]^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{m}_2 = [\,1\,,1\,]^{\mathrm{T}}$.

(b) Βρείτε τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood estimator) της παραμέτρου $\theta > 0$ της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας Erlang,

$$p\,(\,x\,|\,\theta\,) \;=\; \begin{cases} \theta^2 x\, e^{-\,\theta\, x}\,, & x \,\geq\, 0 \\ 0\;, & \text{αλλού} \end{cases} \quad ,$$

με βάση N στατιστικά ανεξάρτητα δείγματά της $x_n\,,\ n = 1\,,2\,,...,N\,.$

(c) Αποδείξτε ότι η απόκλιση (Kullback-Leibler divergence) $d_{ij}(\mathbf{x})$ ενός διανύσματος χαρακτηριστικών $\mathbf{x} = [\,x_1\,,\,x_2\,,\ldots,\,x_L\,]^{\mathrm{T}}$ ως προς κλάσεις ω_i, ω_j (εξίσωση (5.21) του βιβλίου) ικανοποιεί τη σχέση $d_{ij}(\mathbf{x}) \geq 0\,.$

(d) Έστω s μία μετρική ομοιότητας (similarity metric) ορισμένη στο σύνολο X, για την οποία ισχύει $s\,(\mathbf{x}\,,\mathbf{y}) > 0\,,\,\forall\,\mathbf{x}\,,\mathbf{y}\,\in\,X$. Έστω επίσης μία συνεχής μονοτονικά φθίνουσα συνάρτηση $f:\,\mathcal{R}^+ \,\rightarrow\, \mathcal{R}^+$, για την οποία ισχύει ότι

$$f(a) + f(b) \;\geq\; f\left(\frac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}\right) \quad , \quad \forall\, a\,,\; b \;\in\; \mathcal{R}^+ \quad ,$$

Δείξτε ότι η $d = f(s)$ είναι μετρική ανομοιότητας (dissimilarity metric) στο σύνολο X.

Άσκηση 2: Έστω δύο κλάσεις ω_1 και ω_2 με τα ακόλουθα 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών εκπαίδευσης (τρία για κάθε κλάση, γραμμένα σε μορφή $\mathbf{x} = [\,x_1\,,x_2\,]^{\mathrm{T}}$):

$$\omega_1 :\;\; [\,0\,,1\,]^{\mathrm{T}}\,,\quad [\,5\,,4\,]^{\mathrm{T}}\,,\quad [\,-5\,,4\,]^{\mathrm{T}}$$

$$\omega_2 :\;\; [\,0\,,-1\,]^{\mathrm{T}}\,,\; [\,5\,,-4\,]^{\mathrm{T}}\,,\; [\,-5\,,-4\,]^{\mathrm{T}}\;\; .$$

Έστω επίσης και ένα διάνυσμα δοκιμής $\mathbf{x}_{\text{test}} = [\,5\,,1\,]^{\mathrm{T}}$.

(a) Σχεδιάστε τα παραπάνω διανύσματα στο 2-D χώρο με άξονες τα $x_1\,,\ x_2$. Είναι οι κλάσεις γραμμικά διαχωρίσιμες (με βάση τα διανύσματα εκπαίδευσης); Αν ναι, δώστε μία συνάρτηση διάκρισης $g(\mathbf{x}) = w_1\,x_1 + w_2\,x_2 + w_0$ με διάνυσμα συντελεστών $\mathbf{w} = [\,w_1\,,w_2\,,w_0\,]^{\mathrm{T}}$, που διαχωρίζει τις δύο κλάσεις με $g(\mathbf{x}) > 0$ για $\mathbf{x} \in \omega_1$ και $g(\mathbf{x}) < 0$ για $\mathbf{x} \in \omega_2$ (για τα διανύσματα εκπαίδευσης) και που ταξινομεί το διάνυσμα δοκιμής στην κλάση ω_2.

(b) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με βάση τον αλγόριθμο perceptron (σε μορφή batch), αρχικοποιώντας τον αλγόριθμο με τιμές $\mathbf{w}(0) = [\,0\,,0\,,0\,]^{\mathrm{T}}$ και χρησιμοποιώντας βήμα $\rho = 1/6$. Σχεδιάστε την και ταξινομήστε το $\mathbf{x}_{\text{test}}$ με αυτήν.

(c) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με βάση την μέθοδο των μηχανών διανυσματικής στήριξης (support vector machines). Ποια είναι τα διανύσματα στήριξης (support vectors); Ποιο είναι το περιθώριο (margin) μεταξύ των κλάσεων που επιτυγχάνει ο αλγόριθμος; Σχεδιάστε την συνάρτηση διάκρισης και ταξινομήστε το $\mathbf{x}_{\text{test}}$ με αυτήν.

(d) Μειώστε την διάσταση των δεδομένων από δύο σε μία χρησιμοποιώντας ανάλυση κύριων συνιστωσών (Principal Component Analysis – PCA). Βρείτε τις προβολές των διανυσμάτων εκπαίδευσης στον μονοδιάστατο χώρο που προκύπτει, και διαπιστώστε αν οι κλάσεις είναι γραμμικά διαχωρίσιμες σε αυτόν τον χώρο ή όχι. Αν ναι, ταξινομήστε το παράδειγμα δοκιμής στην κατάλληλη κλάση.

(e) Τέλος, μειώστε την διάσταση των δεδομένων από δύο σε μία, αλλά χρησιμοποιώντας ανάλυση γραμμικής διάκρισης αυτήν τη φορά (Linear Discriminant Analysis – LDA). Όπως και πριν, βρείτε τις προβολές των διανυσμάτων εκπαίδευσης στον μονοδιάστατο χώρο που προκύπτει, και διαπιστώστε αν οι κλάσεις είναι γραμμικά διαχωρίσιμες σε αυτόν τον χώρο ή όχι. Αν ναι, ταξινομήστε το παράδειγμα δοκιμής στην κατάλληλη κλάση.

Άσκηση 3: Τα (a), (b), και (c) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

(a) Υπολογίστε με δυναμική χρονική στρέβλωση (dynamic time warping) το κόστος σύγκρισης μεταξύ της ακολουθίας τριών 2-D χαρακτηριστικών (πρότυπο αναφοράς)

$$X = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 2.0 \\ 1.0 & 0.0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

και της ακολουθίας τεσσάρων 2-D χαρακτηριστικών (υπό εξέταση πρότυπο)

$$Y = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 2.0 & 3.0 & 4.0 \end{bmatrix}$$

με κόστος σύγκρισης διανυσμάτων την απόσταση L_1 (Manhattan distance), και υπό δύο ειδών τοπικούς περιορισμούς μετάβασης: (i) Itakura (σχήμα 7.10 του βιβλίου) και (ii) Sakoe-Chiba (σχήμα 7.11.(α) του βιβλίου). Σχεδιάστε τα σχετικά διαγράμματα.

(b) Έστω τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = [\,1\,,0\,]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_2 = [\,-1\,,0\,]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_3 = [\,3\,,1\,]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_4 = [\,-3\,,1\,]^{\mathrm{T}}$. Ομαδοποιήστε τα διανύσματα ιεραρχικά, χρησιμοποιώντας τον συσσωρευτικό αλγόριθμο ομαδοποίησης (agglomerative clustering) με βάση την απόσταση L_1 (Manhattan distance). Χρησιμοποιείστε για ενημέρωση των αποστάσεων του πίνακα ανομοιότητας τον αλγόριθμο απλού δεσμού (single link). Σχεδιάστε το δεντρόγραμμα ανομοιότητας (dendrogram) που προκύπτει.

(c) Έστω τα διανύσματα $\mathbf{x}_1 = [\,3\,,-1\,]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_2 = [\,-3\,,-1\,]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_3 = [\,1\,,0\,]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_4 = [\,-1\,,0\,]^{\mathrm{T}}$. Ομαδοποιήστε τα διανύσματα ακολουθιακά, χρησιμοποιώντας το βασικό ακολουθιακό αλγοριθμικό σχήμα (BSAS) με βάση την απόσταση L_1 (Manhattan distance) και κατώφλι $\theta = 3.5$. Θεωρήστε δύο περιπτώσεις όσον αφορά την ακολουθία που εμφανίζονται τα διανύσματα στον αλγόριθμο: Στην πρώτη περίπτωση με τη σειρά της εκφώνησης (αριστερά προς δεξιά), και στην δεύτερη περίπτωση με την αντίθετη σειρά. Και στις δύο περιπτώσεις, θεωρήστε ότι οι αντιπρόσωποι των ομάδων που προκύπτουν είναι η μέση τιμή των μελών της ομάδας.