Π.Θ., ΤΜΗΥΤΔ ΗΥ 345: ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ Ακ. Έτος 2012-13
Ημ/νία: 08-05-2013 **Σετ Ασκήσεων** Παράδοση: 31-05-2013

Οι ασκήσεις, **γραπτές ή τυπωμένες**, παραδίδονται:

- Ώρες γραφείου διδάσκοντος (10:30 – 12:00) ή στο μάθημα (12:15 – 14:00) την Παρασκευή **31-05-2013**.

Αλλιώς δε θα γίνονται δεκτές. Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι **ατομικές**.

Άσκηση 1:

Τα ακόλουθα ερωτήματα είναι ανεξάρτητα.

(a) Έστω ένα πρόβλημα ταξινόμησης σε δύο ισοπίθανες κλάσεις με βάση διανύσματα χαρακτηριστικών $\mathbf{x}$ που ακολουθούν πολυδιάστατες κανονικές κατανομές για κάθε κλάση (class conditional pdfs) με κοινό πίνακα συνδιασποράς (covariance matrix) $\mathbf{S}$ και διαφορετικά διανύσματα μέσων τιμών $\mathbf{m}_1$ και $\mathbf{m}_2$. Αποδείξτε ότι η πιθανότητα λάθους του Bayesian ταξινομητή ελάχιστου σφάλματος δίνεται από την

$$P_e = \int_{d/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-z^2/2\right) \mathrm{d}\, z \ ,$$

όπου το d είναι η απόσταση Mahalanobis μεταξύ των μέσων τιμών $\mathbf{m}_1$ και $\mathbf{m}_2$.

(b) Δείξτε ότι οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood estimators) των άγνωστων παραμέτρων $\mathbf{m}$ και $\mathbf{S}$ της πολυδιάστατης Gaussian συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{l/2} (\det \mathbf{S})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x}-\mathbf{m})^{\mathrm{T}} \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{m})\right)$$

με βάση N ανεξάρτητες παρατηρήσεις / δείγματά της $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N$, δίνονται από τις

$$\hat{\mathbf{m}}_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{x}_n \ , \quad \hat{\mathbf{S}}_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{m}}_{ML}) (\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{m}}_{ML})^{\mathrm{T}} \ .$$

Ερευνήστε αν οι παραπάνω εκτιμητές είναι αμερόληπτοι (unbiased), και, αν όχι, διορθώστε τους κατάλληλα ώστε να είναι.

(c) Βρείτε την εξίσωση που περιγράφει την επιφάνεια διαχωρισμού (και σχεδιάστε την) στο πρόβλημα Bayesian ταξινόμησης δύο ισοπίθανων κλάσεων με βάση 3-D διανύσματα χαρακτηριστικών $\mathbf{x}$ που ακολουθούν 3-D κανονικές κατανομές για κάθε κλάση (class conditional pdfs) με κοινό πίνακα συνδιασποράς (covariance matrix)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & -0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

και διανύσματα μέσων τιμών $\mathbf{m}_1 = [0,0,0]^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{m}_2 = [0.5, 0.5, 0.5]^{\mathrm{T}}$. Σημείωση: Να επιλυθεί χωρίς τη χρήση Matlab.

<u>Άσκηση 2:</u>

Έστω δύο κλάσεις ω_1 και ω_2 με τα ακόλουθα 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών εκπαίδευσης (δύο για κάθε κλάση, γραμμένα σε μορφή $\mathbf{x} = [\,x_1\,, x_2\,]^{\mathrm{T}}$):

$$\omega_1 : \ [\,-1\,, 2\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,0\,, 1\,]^{\mathrm{T}}$$

$$\omega_2 : \ [\,0\,, -1\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,1\,, -2\,]^{\mathrm{T}}\ .$$

Έστω επίσης και ένα διάνυσμα δοκιμής $\mathbf{x}_{\text{test}} = [\,-3\,, 2\,]^{\mathrm{T}}$.

(a) Σχεδιάστε τα παραπάνω διανύσματα στο 2-D χώρο με άξονες τα x_1 , x_2 . Είναι οι κλάσεις γραμμικά διαχωρίσιμες (με βάση τα διανύσματα εκπαίδευσης); Αν ναι, δώστε μία συνάρτηση διάκρισης $g(\mathbf{x}) = w_1\,x_1 + w_2\,x_2 + w_0$ με διάνυσμα συντελεστών $\mathbf{w} = [\,\mathbf{w_1}\,, \mathbf{w_2}\,, \mathbf{w_0}\,]^{\mathrm{T}}$, που διαχωρίζει τις δύο κλάσεις με $g(\mathbf{x}) > 0$ για $\mathbf{x} \in \omega_1$ και $g(\mathbf{x}) < 0$ για $\mathbf{x} \in \omega_2$ (για τα διανύσματα εκπαίδευσης) και που ταξινομεί το διάνυσμα δοκιμής στην κλάση ω_1 . Δώστε επίσης μία συνάρτηση διάκρισης της ίδιας μορφής που να ταξινομεί το διάνυσμα δοκιμής στην κλάση ω_2 .

(b) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με βάση τον αλγόριθμο perceptron (σε μορφή batch), αρχικοποιώντας τον αλγόριθμο με τιμές $\mathbf{w}(0) = [\,0\,, 0\,, 0\,]^{\mathrm{T}}$ και χρησιμοποιώντας βήμα $\rho = 1.0$. Σχεδιάστε την και ταξινομήστε το $\mathbf{x}_{\text{test}}$ με αυτήν.

(c) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με βάση την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος τετραγωνικών σφαλμάτων (minimum least squares error). Πόσο είναι το ελάχιστο σφάλμα εκπαίδευσης που πετυχαίνει ο αλγόριθμος; Σχεδιάστε την συνάρτηση διάκρισης και ταξινομήστε το $\mathbf{x}_{\text{test}}$ με αυτήν.

(d) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με βάση την μέθοδο των μηχανών διανυσματικής στήριξης (support vector machines). Ποια είναι τα διανύσματα στήριξης (support vectors); Ποιο είναι το περιθώριο (margin) μεταξύ των κλάσεων που επιτυγχάνει ο αλγόριθμος; Σχεδιάστε την συνάρτηση διάκρισης και ταξινομήστε το $\mathbf{x}_{\text{test}}$ με αυτήν.

<u>Σημείωση:</u> Τα παραπάνω να επιλυθούν χωρίς τη χρήση Matlab.

<u>Άσκηση 3:</u>

Έστω δύο κλάσεις ω_1 και ω_2 με τα ακόλουθα 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών εκπαίδευσης (γραμμένα σε μορφή $\mathbf{x} = [\,x_1\,, x_2\,]^{\mathrm{T}}$):

$$\omega_1 : \ [\,0\,, 0\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,0\,, -1\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,0\,, 1\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,-1\,, 0\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,1\,, 0\,]^{\mathrm{T}}$$

$$\omega_2 : \ [\,2\,, 0\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,0\,, -2\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,2\,, -2\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,-2\,, 0\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,-2\,, 2\,]^{\mathrm{T}}\,,\ [\,0\,, 2\,]^{\mathrm{T}}\ .$$

Έστω επίσης και ένα διάνυσμα δοκιμής $\mathbf{x}_{\text{test}} = [\,2\,, 2\,]^{\mathrm{T}}$.

(a) Σχεδιάστε τα παραπάνω διανύσματα στο 2-D χώρο με άξονες τα x_1 , x_2 . Είναι οι κλάσεις γραμμικά διαχωρίσιμες (με βάση τα διανύσματα εκπαίδευσης);

(b) Κατασκευάστε ένα perceptron δύο επιπέδων που να ταξινομεί τα διανύσματα εκπαίδευσης σωστά στις δύο κλάσεις. Σε ποια κλάση ταξινομείται το διάνυσμα δοκιμής $\mathbf{x}_{\text{test}}$;

(c) Λύστε το παραπάνω πρόβλημα με δίκτυο ακτινωτής συνάρτησης βάσης (RBF). Σε ποια κλάση ταξινομείται το διάνυσμα δοκιμής;

(d) Λύστε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας πολυωνυμικό ταξινομητή και ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής με αυτόν.

Σημείωση: Τα παραπάνω να επιλυθούν χωρίς τη χρήση Matlab.

Άσκηση 4:

Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες για την απόκλιση (Kullback-Leibler divergence) $d_{ij}(\mathbf{x})$ ενός διανύσματος χαρακτηριστικών $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_L]^{\mathrm{T}}$ ως προς κλάσεις ω_i, ω_j (εξίσωση (5.21) του βιβλίου):

(a) $d_{ij}(\mathbf{x}) \geq 0$.

(b) Για στατιστικά ανεξάρτητες μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_L$, ισχύει $d_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{L} d_{ij}(x_l)$.

(c) Για πολυδιάστατες κανονικές κατανομές για κάθε κλάση (multivariate Gaussian class conditional pdfs) με κοινό πίνακα συνδιασποράς $\mathbf{S}$ και διανύσματα μέσων τιμών $\mathbf{m}_i$ (για την κλάση ω_i), η απόκλιση ισούται με την απόσταση Mahalanobis μεταξύ των αντίστοιχων διανυσμάτων μέσων τιμών, δηλ. $d_{ij}(\mathbf{x}) = (\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_j)^{\mathrm{T}}\, \mathbf{S}^{-1}\, (\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_j)$.

Άσκηση 5:

Υπολογίστε με διαδικασία δυναμικής χρονικής στρέβλωσης (dynamic time warping):

(a) Την απόσταση edit μεταξύ των ακολουθιών συμβόλων "harbour" (πρότυπο αναφοράς) και "hair born" (υπό εξέταση πρότυπο).

(b) Το κόστος σύγκρισης μεταξύ της ακολουθίας τεσσάρων 2-D χαρακτηριστικών (πρότυπο αναφοράς)

$$X = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & -1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & -1.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

και της ακολουθίας πέντε 2-D χαρακτηριστικών (υπό εξέταση πρότυπο)

$$Y = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.0 & -1.0 & -1.0 & 1.0 \\ 1.0 & -1.0 & 0.0 & -2.0 & -3.0 \end{bmatrix}$$

υπό τοπικούς περιορισμούς μετάβασης Itakura (σχήμα 7.10) του βιβλίου και κόστος σύγκρισης διανυσμάτων την απόσταση L_1 (Manhattan distance).

Σχεδιάστε τα σχετικά διαγράμματα δυναμικού προγραμματισμού και στις δύο περιπτώσεις.

Σημείωση: Τα παραπάνω να επιλυθούν χωρίς τη χρήση Matlab.

Άσκηση 6:

Θεωρήστε την μοντελοποίηση ενός πειράματος ρίψης τριών νομισμάτων με προκατάληψη, χρησιμοποιώντας ένα HMM με τρεις καταστάσεις.

- Η πρώτη κατάσταση μοντελοποιεί το πρώτο νόμισμα c_1 και έχει πιθανότητες παρατήρησης $P(H|c_1) = 0.50$, $P(T|c_1) = 0.50$ (για αποτέλεσμα ρίψης heads (H) ή tails (T)).
- Για το δεύτερο νόμισμα έχουμε $P(H|c_2) = 0.75$, $P(T|c_2) = 0.25$.
- Για το τρίτο νόμισμα έχουμε $P(H|c_3) = 0.25$, $P(T|c_3) = 0.75$.

Υποθέτουμε επίσης ότι η πιθανότητα μετάβασης μεταξύ νομισμάτων είναι ομοιόμορφη και ίση με $a_{ij} = 1/3$ (όπως επίσης και η αρχική πιθανότητα).

(a) Αν έχει παρατηρηθεί η ακολουθία αποτελεσμάτων ρίψης $\mathbf{O} = (HHTH)$, μπορείτε να δείτε εύκολα ποιά είναι η πιο πιθανή ακολουθία καταστάσεων $\hat{\mathbf{c}}$ (δηλαδή των νομισμάτων των τεσσάρων ρίψεων);

(b) Υπολογίστε την κοινή πιθανότητα $P[\mathbf{O}, \hat{\mathbf{c}}]$.

(c) Πόσες φορές πιο μικρή από την απάντηση στο (b) είναι η πιθανότητα ότι η ακολουθία αποτελεσμάτων ρίψης προήλθε από τέσσερεις ρίψεις του νομίσματος c_1;

(d) Υπολογίστε την ακολουθία $\hat{\mathbf{c}}$ του ερωτήματος (a) χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Viterbi.

Σημείωση: Τα παραπάνω να επιλυθούν χωρίς τη χρήση Matlab.