

---

Όνομα/νυμο:

Υπογραφή:

---

ΑΜ:

Εξάμηνο:

Αριθμός διφύλλων:

---

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Ανοιχτές σημειώσεις μαθήματος. Κλειστά κινητά και υπολογιστές.

---

**Θέμα 1:** (40%) Έστω δύο κλάσεις  $\omega_1$  και  $\omega_2$  με τα ακόλουθα 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών εκπαίδευσης (τέσσερα για κάθε κλάση, γραμμένα σε μορφή  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ ):

$$\omega_1 : [1, 1]^T, [2, 1]^T, [1, 2]^T, [2, 2]^T$$

$$\omega_2 : [-1, -1]^T, [-2, -1]^T, [-1, -2]^T, [-2, -2]^T .$$

Έστω επίσης και ένα διάνυσμα δοκιμής  $\mathbf{x}_{\text{test}} = [1, 0]^T$ .

- (a, 12%) Σχεδιάστε τα παραπάνω διανύσματα στο 2-D χώρο με άξονες τα  $x_1, x_2$ . Είναι οι κλάσεις γραμμικά διαχωρίσιμες (με βάση τα διανύσματα εκπαίδευσης); Αν ναι, δώστε μία συνάρτηση διάκρισης  $g(\mathbf{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_0$  με διάνυσμα συντελεστών  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_0]^T$ , που διαχωρίζει τις δύο κλάσεις με  $g(\mathbf{x}) > 0$  για  $\mathbf{x} \in \omega_1$  και  $g(\mathbf{x}) < 0$  για  $\mathbf{x} \in \omega_2$  (για τα διανύσματα εκπαίδευσης) και που ταξινομεί το διάνυσμα δοκιμής στην κλάση  $\omega_2$ .
- (b, 12%) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με βάση τον αλγόριθμο perceptron (σε μορφή batch), αρχικοποιώντας τον αλγόριθμο με τιμές  $\mathbf{w}(0) = [1, 1, -15/4]^T$  και χρησιμοποιώντας βήμα  $\rho = 1/4$ . Σχεδιάστε την και ταξινομήστε το  $\mathbf{x}_{\text{test}}$  με αυτήν. Σημείωση: Ο συμβολισμός της  $g(\mathbf{x})$  και τα πρόσημα επιλογής των κλάσεων είναι όπως στο υπο-ερώτημα (a).
- (c, 16%) Υπολογίστε με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας κανονικές κατανομές (2-D Gaussian) για τις υπό συνθήκη συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας  $p(\mathbf{x}|\omega_1)$  και  $p(\mathbf{x}|\omega_2)$ . Στη συνέχεια ταξινομήστε το  $\mathbf{x}_{\text{test}}$  με βάση τη θεωρία αποφάσεων του Bayes.
- 

[ΣΥΝΕΧΕΙΑ: ΘΕΜΑΤΑ 2 ΚΑΙ 3 ΣΤΗΝ ΠΙΣΩ ΣΕΛΙΔΑ]

---

**Θέμα 2:** (25%) Τα παρακάτω είναι ανεξάρτητα υπο-ερωτήματα:

(a, 12%) Έστω τα οκτώ διανύσματα εκπαίδευσης του Θέματος 1, τα οποία παρουσιάζονται στο βασικό ακολουθιακό αλγοριθμικό σχήμα ομαδοποίησης (BSAS) με την ακόλουθη σειρά:

$$\mathbf{x}_1=[1, 1]^T, \quad \mathbf{x}_2=[2, 2]^T, \quad \mathbf{x}_3=[1, 2]^T, \quad \mathbf{x}_4=[2, 1]^T, \\ \mathbf{x}_5=[-1, -1]^T, \quad \mathbf{x}_6=[-2, -1]^T, \quad \mathbf{x}_7=[-1, -2]^T, \quad \mathbf{x}_8=[-2, -2]^T.$$

Ομαδοποιήστε τα διανύσματα αυτά με βάση τον αλγόριθμο BSAS, χρησιμοποιώντας την απόσταση  $L_1$  (Manhattan distance), κατώφλι  $\theta = 1.25$ , και θεωρώντας ότι οι αντιπρόσωποι των ομάδων που προκύπτουν είναι η μέση τιμή των μελών της ομάδας. Σχεδιάστε τις ομάδες στον 2-D χώρο και σχολιάστε αν το πρόβλημα επιδέχεται περισσότερες λύσεις.

(b, 13%) Έστω δύο διανύσματα εκπαίδευσης από κάθε κλάση του Θέματος 1, συγκεκριμένα τα:

$$\mathbf{x}_1=[1, 1]^T, \quad \mathbf{x}_2=[2, 2]^T, \quad \mathbf{x}_3=[-1, -1]^T, \quad \mathbf{x}_4=[-2, -1]^T.$$

Ομαδοποιήστε τα διανύσματα ιεραρχικά, χρησιμοποιώντας τον συσσωρευτικό αλγόριθμο ομαδοποίησης (agglomerative clustering) με βάση την απόσταση  $L_1$  (Manhattan distance). Χρησιμοποιείτε για ενημέρωση των αποστάσεων του πίνακα ανομοιότητας τον αλγόριθμο απλού δεσμού (single link). Σχεδιάστε το δεντρόγραμμα ανομοιότητας (dendrogram) που προκύπτει.

---

**Θέμα 3:** (35%) Έστω δύο κλάσεις  $\omega_1$  και  $\omega_2$  με τα ακόλουθα 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών εκπαίδευσης (γραμμένα σε μορφή  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ ):

$$\omega_1 : [1, 0]^T, [-1, 0]^T, [3, 1]^T, [-3, 1]^T, [3, -1]^T, [-3, -1]^T,$$

$$\omega_2 : [1, 2]^T, [1, -2]^T, [-1, 2]^T, [-1, -2]^T.$$

Έστω επίσης και ένα διάνυσμα δοκιμής  $\mathbf{x}_{\text{test}} = [3, 2]^T$ .

(a, 12%) Σχεδιάστε τα παραπάνω διανύσματα στο 2-D χώρο με άξονες τα  $x_1, x_2$ . Είναι οι κλάσεις γραμμικά διαχωρίσιμες (με βάση τα διανύσματα εκπαίδευσης);

(b, 10%) Ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής με βάση τον κανόνα των τριών πλησιέστερων γειτόνων (3-NN), χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια απόσταση ( $L_2$ ) μεταξύ διανυσμάτων.

(c, 13%) Κατασκευάστε (και σχεδιάστε) έναν πολυωνυμικό ταξινομητή που να ταξινομεί τα διανύσματα εκπαίδευσης σωστά στις δύο κλάσεις και ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής με αυτόν. Επίσης, σχεδιάστε τις περιοχές απόφασης για κάθε κλάση στον αρχικό χώρο.

---

---

Όνομα/νυμο:

Υπογραφή:

---

ΑΜ:

Εξάμηνο:

Αριθμός διφύλλων:

---

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Ανοιχτές σημειώσεις μαθήματος. Κλειστά κινητά και υπολογιστές.

---

**Θέμα 1:** (40%) Έστω δύο κλάσεις  $\omega_1$  και  $\omega_2$  με τα ακόλουθα 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών εκπαίδευσης (τέσσερα για κάθε κλάση, γραμμένα σε μορφή  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ ):

$$\omega_1 : [-1, -1]^T, [-2, -1]^T, [-1, -2]^T, [-2, -2]^T,$$

$$\omega_2 : [1, 1]^T, [2, 1]^T, [1, 2]^T, [2, 2]^T.$$

Έστω επίσης και ένα διάνυσμα δοκιμής  $\mathbf{x}_{\text{test}} = [1, 0]^T$ .

- (a, 12%) Σχεδιάστε τα παραπάνω διανύσματα στο 2-D χώρο με άξονες τα  $x_1, x_2$ . Είναι οι κλάσεις γραμμικά διαχωρίσιμες (με βάση τα διανύσματα εκπαίδευσης); Αν ναι, δώστε μία συνάρτηση διάκρισης  $g(\mathbf{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_0$  με διάνυσμα συντελεστών  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_0]^T$ , που διαχωρίζει τις δύο κλάσεις με  $g(\mathbf{x}) > 0$  για  $\mathbf{x} \in \omega_1$  και  $g(\mathbf{x}) < 0$  για  $\mathbf{x} \in \omega_2$  (για τα διανύσματα εκπαίδευσης) και που ταξινομεί το διάνυσμα δοκιμής στην κλάση  $\omega_2$ .
- (b, 12%) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με τον αλγόριθμο perceptron (σε μορφή batch), αρχικοποιώντας τον αλγόριθμο με τιμές  $\mathbf{w}(0) = [-1, -1, -15/4]^T$  και χρησιμοποιώντας βήμα  $\rho = 1/4$ . Σχεδιάστε την και ταξινομήστε το  $\mathbf{x}_{\text{test}}$  με αυτήν. Σημείωση: Ο συμβολισμός της  $g(\mathbf{x})$  και τα πρόσημα επιλογής των κλάσεων είναι όπως στο υπο-ερώτημα (a).
- (c, 16%) Υπολογίστε με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας κανονικές κατανομές (2-D Gaussian) για τις υπό συνθήκη συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας  $p(\mathbf{x}|\omega_1)$  και  $p(\mathbf{x}|\omega_2)$ . Στη συνέχεια ταξινομήστε το  $\mathbf{x}_{\text{test}}$  με βάση τη θεωρία αποφάσεων του Bayes.
- 

[ΣΥΝΕΧΕΙΑ: ΘΕΜΑΤΑ 2 ΚΑΙ 3 ΣΤΗΝ ΠΙΣΩ ΣΕΛΙΔΑ]

---

**Θέμα 2:** (25%) Τα παρακάτω είναι ανεξάρτητα υπο-ερωτήματα:

(a, 12%) Έστω τα οκτώ διανύσματα εκπαίδευσης του Θέματος 1, τα οποία παρουσιάζονται στο βασικό ακολουθιακό αλγοριθμικό σχήμα ομαδοποίησης (BSAS) με την ακόλουθη σειρά:

$$\mathbf{x}_1 = [1, 1]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [1, 2]^T, \quad \mathbf{x}_3 = [2, 1]^T, \quad \mathbf{x}_4 = [2, 2]^T, \\ \mathbf{x}_5 = [-1, -1]^T, \quad \mathbf{x}_6 = [-2, -2]^T, \quad \mathbf{x}_7 = [-1, -2]^T, \quad \mathbf{x}_8 = [-2, -1]^T.$$

Ομαδοποιήστε τα διανύσματα αυτά με βάση τον αλγόριθμο BSAS, χρησιμοποιώντας την απόσταση  $L_1$  (Manhattan distance), κατώφλι  $\theta = 1.25$ , και θεωρώντας ότι οι αντιπρόσωποι των ομάδων που προκύπτουν είναι η μέση τιμή των μελών της ομάδας. Σχεδιάστε τις ομάδες στον 2-D χώρο και σχολιάστε αν το πρόβλημα επιδέχεται περισσότερες λύσεις.

(b, 13%) Έστω δύο διανύσματα εκπαίδευσης από κάθε κλάση του Θέματος 1, συγκεκριμένα τα:

$$\mathbf{x}_1 = [1, 1]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [1, 2]^T, \quad \mathbf{x}_3 = [-1, -1]^T, \quad \mathbf{x}_4 = [-2, -2]^T.$$

Ομαδοποιήστε τα διανύσματα ιεραρχικά, χρησιμοποιώντας τον συσσωρευτικό αλγόριθμο ομαδοποίησης (agglomerative clustering) με βάση την απόσταση  $L_1$  (Manhattan distance). Χρησιμοποιείστε για ενημέρωση των αποστάσεων του πίνακα ανομοιότητας τον αλγόριθμο πλήρους δεσμού (complete link). Σχεδιάστε το δέντρογραμμα ανομοιότητας (dendrogram) που προκύπτει.

---

**Θέμα 3:** (35%) Έστω δύο κλάσεις  $\omega_1$  και  $\omega_2$  με τα ακόλουθα 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών εκπαίδευσης (γραμμένα σε μορφή  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ ):

$$\omega_1 : [1, 2]^T, [1, -2]^T, [-1, 2]^T, [-1, -2]^T,$$

$$\omega_2 : [3, -1]^T, [-3, -1]^T, [1, 0]^T, [-1, 0]^T, [3, 1]^T, [-3, 1]^T.$$

Έστω επίσης και ένα διάνυσμα δοκιμής  $\mathbf{x}_{\text{test}} = [-3, -2]^T$ .

(a, 12%) Σχεδιάστε τα παραπάνω διανύσματα στο 2-D χώρο με άξονες τα  $x_1, x_2$ . Είναι οι κλάσεις γραμμικά διαχωρίσιμες (με βάση τα διανύσματα εκπαίδευσης);

(b, 10%) Ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής με βάση τον κανόνα των τριών πλησιέστερων γειτόνων (3-NN), χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια απόσταση ( $L_2$ ) μεταξύ διανυσμάτων.

(c, 13%) Κατασκευάστε (και σχεδιάστε) έναν πολυωνυμικό ταξινομητή που να ταξινομεί τα διανύσματα εκπαίδευσης σωστά στις δύο κλάσεις και ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής με αυτόν. Επίσης, σχεδιάστε τις περιοχές απόφασης για κάθε κλάση στον αρχικό χώρο.

---