

Όνομα/νυμο:

Υπογραφή:

ΑΜ:

Εξάμηνο:

Αριθμός διφύλλων:

Θέμα 1: (75%) Έστω δύο κλάσεις ω_1 και ω_2 με τα ακόλουθα 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών εκπαίδευσης (τρία για κάθε κλάση, γραμμένα σε μορφή $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$):

$$\omega_1 : [1, 1]^T, [2, 1]^T, [1, 2]^T$$

$$\omega_2 : [-1, -1]^T, [-2, -1]^T, [-1, -2]^T.$$

Έστω επίσης και ένα διάνυσμα δοκιμής $\mathbf{x}_{\text{test}} = [1, 0]^T$.

- (a, 12%) Σχεδιάστε τα παραπάνω διανύσματα στο 2-D χώρο με άξονες τα x_1, x_2 . Είναι οι κλάσεις γραμμικά διαχωρίσιμες (με βάση τα διανύσματα εκπαίδευσης); Αν ναι, δώστε μία συνάρτηση διάκρισης $g(\mathbf{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_0$ με διάνυσμα συντελεστών $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_0]^T$, που διαχωρίζει τις δύο κλάσεις με $g(\mathbf{x}) > 0$ για $\mathbf{x} \in \omega_1$ και $g(\mathbf{x}) < 0$ για $\mathbf{x} \in \omega_2$ (για τα διανύσματα εκπαίδευσης) και που ταξινομεί το διάνυσμα δοκιμής στην κλάση ω_2 .
- (b, 8%) Ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής με βάση τον κανόνα του πλησιέστερου γείτονα (1-NN), χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε μέτρο απόστασης μεταξύ διανυσμάτων στον δυδιάστατο χώρο επιθυμείτε.
- (c, 12%) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με βάση τον αλγόριθμο perceptron (σε μορφή batch), αρχικοποιώντας τον αλγόριθμο με τιμές $\mathbf{w}(0) = [1, 1, -15/4]^T$ και χρησιμοποιώντας βήμα $\rho = 1/4$. Σχεδιάστε την και ταξινομήστε το \mathbf{x}_{test} με αυτήν. Σημείωση: Ο συμβολισμός της $g(\mathbf{x})$ και τα πρόσημα επιλογής των κλάσεων είναι όπως στο υπο-ερώτημα (a).
- (d, 12%) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με βάση την μέθοδο των μηχανών διανυσματικής στήριξης (support vector machines), εκφράζοντας το διάνυσμα $[w_1, w_2]^T$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων στήριξης (support vectors) και στη συνέχεια βρίσκοντας και το w_0 . Ποιο είναι το περιθώριο (margin) μεταξύ των κλάσεων που επιτυγχάνει ο αλγόριθμος; Σχεδιάστε την συνάρτηση διάκρισης και ταξινομήστε το \mathbf{x}_{test} με αυτήν.
- (e, 14%) Μειώστε την διάσταση των δεδομένων από δύο σε μία χρησιμοποιώντας ανάλυση κύριων συνιστωσών (Principal Component Analysis – PCA). Βρείτε τις προβολές των διανυσμάτων εκπαίδευσης στον μονοδιάστατο χώρο που προκύπτει, και διαπιστώστε αν οι κλάσεις είναι γραμμικά διαχωρίσιμες σε αυτόν τον χώρο ή όχι. Αν ναι, ταξινομήστε το παράδειγμα δοκιμής στην κατάλληλη κλάση, με βάση τον κανόνα του πλησιέστερου γείτονα (1-NN) στον μονοδιάστατο χώρο που προκύπτει.
- (f, 17%) Προσθέστε τώρα δύο ακόμη σημεία στο σύνολο εκπαίδευσης, συγκεκριμένα το $[2, 2]^T$ στην κλάση ω_1 και το $[-2, -2]^T$ στην κλάση ω_2 (συνεπώς έχουμε 4 σημεία εκπαίδευσης για κάθε κλάση). Υπολογίστε με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας κανονικές κατανομές (2-D Gaussian) για τις υπό συνθήκη συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $p(\mathbf{x}|\omega_1)$ και $p(\mathbf{x}|\omega_2)$. Στη συνέχεια ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής, \mathbf{x}_{test} , με βάση τη θεωρία αποφάσεων του Bayes.

Θέμα 2: (25%) Τα παρακάτω είναι ανεξάρτητα υπο-ερωτήματα.

(a, 11%) Έστω τα έξι διανύσματα εκπαίδευσης του Θέματος 1(a-e), τα οποία παρουσιάζονται στο βασικό ακολουθιακό αλγοριθμικό σχήμα ομαδοποίησης (BSAS) με την ακόλουθη σειρά:

$$\mathbf{x}_1 = [1, 1]^T, \mathbf{x}_2 = [2, 1]^T, \mathbf{x}_3 = [1, 2]^T, \mathbf{x}_4 = [-1, -1]^T, \mathbf{x}_5 = [-2, -1]^T, \mathbf{x}_6 = [-1, -2]^T.$$

Ομαδοποιήστε τα διανύσματα αυτά με βάση τον αλγόριθμο BSAS, χρησιμοποιώντας την απόσταση L_1 (Manhattan distance), κατώφλι $\theta = 1.25$, και θεωρώντας ότι οι αντιπρόσωποι των ομάδων που προκύπτουν είναι η μέση τιμή των μελών της ομάδας.

(b, 14%) Υποθέστε τώρα ότι τα τρία διανύσματα εκπαίδευσης κάθε κλάσης του Θέματος 1(a-e) αποτελούν ένα πρότυπο αναφοράς (template) της αντίστοιχης κλάσης που εξελίσσεται σε 3 συνεχείς χρονικές στιγμές. Έχουμε δηλαδή δύο πρότυπα (ένα για κάθε κλάση):

$$\omega_1 : \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \omega_2 : \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Έστω επίσης ένα πρότυπο δοκιμής (υπό εξέταση πρότυπο)

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

το οποίο θέλουμε να ταξινομήσουμε σε μία από τις δύο κλάσεις, ω_1 ή ω_2 , με βάση τη μεθοδολογία δυναμικής χρονικής στρέβλωσης (dynamic time warping). Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε:

- ως κόστος σύγκρισης διανυσμάτων την απόσταση L_1 (Manhattan distance),
- τοπικούς περιορισμούς μετάβασης Sakoe-Chiba (δηλαδή στο δυδιάστατο πλέγμα της δυναμικής χρονικής στρέβλωσης επιτρέπονται μεταβάσεις σε κάθε καινούργιο κόμβο από τον αμέσως προηγούμενο κάτω του κόμβο, τον αμέσως προηγούμενο αριστερά του, και τον διαγώνιο κάτω αριστερά του),
- και περιορισμούς άκρων που απαιτούν το βέλτιστο μονοπάτι να διέρχεται από τον αρχικό και τον τελικό κόμβο που αποτελούνται από τα ζεύγη των πρώτων και τελευταίων διανυσμάτων των προτύπων αναφοράς και δοκιμής, αντίστοιχα.

Βρείτε τις αποστάσεις $d_{DTW}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y})$ και $d_{DTW}(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y})$, σχεδιάζοντας τα σχετικά διαγράμματα δυναμικής χρονικής στρέβλωσης. Σε ποια κλάση θα ταξινομηθεί το πρότυπο δοκιμής με βάση τις αποστάσεις αυτές;

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Ανοιχτές σημειώσεις μαθήματος. Κλειστά κινητά και υπολογιστές.

Όνομα/νυμο:

Υπογραφή:

ΑΜ:

Εξάμηνο:

Αριθμός διφύλλων:

Θέμα 1: (75%) Έστω δύο κλάσεις ω_1 και ω_2 με τα ακόλουθα 2-D διανύσματα χαρακτηριστικών εκπαίδευσης (τρία για κάθε κλάση, γραμμένα σε μορφή $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$):

$$\omega_1 : [-1, -1]^T, [-2, -1]^T, [-1, -2]^T,$$

$$\omega_2 : [1, 1]^T, [2, 1]^T, [1, 2]^T.$$

Έστω επίσης και ένα διάνυσμα δοκιμής $\mathbf{x}_{\text{test}} = [1, 0]^T$.

- (a, 12%) Σχεδιάστε τα παραπάνω διανύσματα στο 2-D χώρο με άξονες τα x_1, x_2 . Είναι οι κλάσεις γραμμικά διαχωρίσιμες (με βάση τα διανύσματα εκπαίδευσης); Αν ναι, δώστε μία συνάρτηση διάκρισης $g(\mathbf{x}) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_0$ με διάνυσμα συντελεστών $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_0]^T$, που διαχωρίζει τις δύο κλάσεις με $g(\mathbf{x}) > 0$ για $\mathbf{x} \in \omega_1$ και $g(\mathbf{x}) < 0$ για $\mathbf{x} \in \omega_2$ (για τα διανύσματα εκπαίδευσης) και που ταξινομεί το διάνυσμα δοκιμής στην κλάση ω_2 .
- (b, 8%) Ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής με βάση τον κανόνα του πλησιέστερου γείτονα (1-NN), χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε μέτρο απόστασης μεταξύ διανυσμάτων στον δυδιάστατο χώρο επιθυμείτε.
- (c, 12%) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με τον αλγόριθμο perceptron (σε μορφή batch), αρχικοποιώντας τον αλγόριθμο με τιμές $\mathbf{w}(0) = [-1, -1, -15/4]^T$ και χρησιμοποιώντας βήμα $\rho = 1/4$. Σχεδιάστε την και ταξινομήστε το \mathbf{x}_{test} με αυτήν. Σημείωση: Ο συμβολισμός της $g(\mathbf{x})$ και τα πρόσημα επιλογής των κλάσεων είναι όπως στο υπο-ερώτημα (a).
- (d, 12%) Βρείτε τη γραμμική συνάρτηση διάκρισης των δύο κλάσεων με βάση την μέθοδο των μηχανών διανυσματικής στήριξης (support vector machines), εκφράζοντας το διάνυσμα $[w_1, w_2]^T$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων στήριξης (support vectors) και στη συνέχεια βρίσκοντας και το w_0 . Ποιο είναι το περιθώριο (margin) μεταξύ των κλάσεων που επιτυγχάνει ο αλγόριθμος; Σχεδιάστε την συνάρτηση διάκρισης και ταξινομήστε το \mathbf{x}_{test} με αυτήν.
- (e, 14%) Μειώστε την διάσταση των δεδομένων από δύο σε μία χρησιμοποιώντας ανάλυση κύριων συνιστωσών (Principal Component Analysis – PCA). Βρείτε τις προβολές των διανυσμάτων εκπαίδευσης στον μονοδιάστατο χώρο που προκύπτει, και διαπιστώστε αν οι κλάσεις είναι γραμμικά διαχωρίσιμες σε αυτόν τον χώρο ή όχι. Αν ναι, ταξινομήστε το παράδειγμα δοκιμής στην κατάλληλη κλάση, με βάση τον κανόνα του πλησιέστερου γείτονα (1-NN) στον μονοδιάστατο χώρο που προκύπτει.
- (f, 17%) Προσθέστε τώρα δύο ακόμη σημεία στο σύνολο εκπαίδευσης, συγκεκριμένα το $[-2, -2]^T$ στην κλάση ω_1 και το $[2, 2]^T$ στην κλάση ω_2 (συνεπώς έχουμε 4 σημεία εκπαίδευσης για κάθε κλάση). Υπολογίστε με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας κανονικές κατανομές (2-D Gaussian) για τις υπό συνθήκη συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $p(\mathbf{x}|\omega_1)$ και $p(\mathbf{x}|\omega_2)$. Στη συνέχεια ταξινομήστε το διάνυσμα δοκιμής, \mathbf{x}_{test} , με βάση τη θεωρία αποφάσεων του Bayes.

Θέμα 2: (25%) Τα παρακάτω είναι ανεξάρτητα υπο-ερωτήματα.

(a, 11%) Έστω τα έξι διανύσματα εκπαίδευσης του Θέματος 1(a-e), τα οποία παρουσιάζονται στο βασικό ακολουθιακό αλγοριθμικό σχήμα ομαδοποίησης (BSAS) με την ακόλουθη σειρά:

$$\mathbf{x}_1 = [1, 1]^T, \mathbf{x}_2 = [2, 1]^T, \mathbf{x}_3 = [1, 2]^T, \mathbf{x}_4 = [-1, -1]^T, \mathbf{x}_5 = [-2, -1]^T, \mathbf{x}_6 = [-1, -2]^T.$$

Ομαδοποιήστε τα διανύσματα αυτά με βάση τον αλγόριθμο BSAS, χρησιμοποιώντας την απόσταση L_1 (Manhattan distance), κατώφλι $\theta = 1.75$, και θεωρώντας ότι οι αντιπρόσωποι των ομάδων που προκύπτουν είναι η μέση τιμή των μελών της ομάδας.

(b, 14%) Υποθέστε τώρα ότι τα τρία διανύσματα εκπαίδευσης κάθε κλάσης του Θέματος 1(a-e) αποτελούν ένα πρότυπο αναφοράς (template) της αντίστοιχης κλάσης που εξελίσσεται σε 3 συνεχείς χρονικές στιγμές. Έχουμε δηλαδή δύο πρότυπα (ένα για κάθε κλάση):

$$\omega_1 : \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \omega_2 : \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Έστω επίσης ένα πρότυπο δοκιμής (υπό εξέταση πρότυπο)

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

το οποίο θέλουμε να ταξινομήσουμε σε μία από τις δύο κλάσεις, ω_1 ή ω_2 , με βάση τη μεθοδολογία δυναμικής χρονικής στρέβλωσης (dynamic time warping). Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε:

- ως κόστος σύγκρισης διανυσμάτων την απόσταση L_1 (Manhattan distance),
- τοπικούς περιορισμούς μετάβασης Sakoe-Chiba (δηλαδή στο δυδιάστατο πλέγμα της δυναμικής χρονικής στρέβλωσης επιτρέπονται μεταβάσεις σε κάθε καινούργιο κόμβο από τον αμέσως προηγούμενο κάτω του κόμβο, τον αμέσως προηγούμενο αριστερά του, και τον διαγώνιο κάτω αριστερά του),
- και περιορισμούς άκρων που απαιτούν το βέλτιστο μονοπάτι να διέρχεται από τον αρχικό και τον τελικό κόμβο που αποτελούνται από τα ζεύγη των πρώτων και τελευταίων διανυσμάτων των προτύπων αναφοράς και δοκιμής, αντίστοιχα.

Βρείτε τις αποστάσεις $d_{DTW}(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y})$ και $d_{DTW}(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y})$, σχεδιάζοντας τα σχετικά διαγράμματα δυναμικής χρονικής στρέβλωσης. Σε ποια κλάση θα ταξινομηθεί το πρότυπο δοκιμής με βάση τις αποστάσεις αυτές;

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Ανοιχτές σημειώσεις μαθήματος. Κλειστά κινητά και υπολογιστές.
