ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Στην εργασία που ακολουθεί χρειάζεται να υπολογίσετε την αριθμητική λύση τριών μαθηματικών μοντέλων, τα οποία χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της κίνησης σε ένα δίκτυο υπολογιστών κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις. Τα δίκτυα υπολογιστών που θεωρούμε μοντελοποιούνται από έναν αριθμό ουρών που συνδέονται με οποιαδήποτε τοπολογία. Μία πλήρης αντιμετώπιση τέτοιων μοντέλων εξετάζεται και αναλύεται στην επισυναπτόμενη εργασία (Numerical Methods for Modeling Computer Networks Under Nonstationary Conditions). Χρειάζεται να τονίσουμε ότι τα μοντέλα που θεωρούμε δεν περιορίζονται σε δίκτυα υπολογιστών, αλλά εφαρμόζονται στη γενική κλάση των αποκαλούμενων μη στάσιμων συστημάτων ουρών. Στη δική σας εργασία χρειάζεται να αναπαράγετε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην επισυναπτόμενη εργασία.

Μοντέλο I

Στην περίπτωση αυτή θεωρήστε ένα μαθηματικό μοντέλο ενός συνδέσμου, ο οποίος αντιπροσωπεύεται από μία ουρά κάτω από συνθήκες μη στασιμότητας. Επιπλέον υποθέτουμε ότι:

i) Ο ρυθμός άφιξης πακέτων είναι σύμφωνος με μία μη στάσιμη διαδικασία Poisson

ii) Η ουρά είναι τύπου M/M/1/K όπου K είναι ο μέγιστος αριθμός πακέτων που επιτρέπονται στο σύνδεσμο (ή πελάτες στο σύστημα (σύνδεσμο) = ουρά αναμονής + εξυπηρετούμενος). Ο ρυθμός άφιξης $\lambda^n(t)$ και ο ρυθμός εξυπηρέτησης $\mu^n(t)$ εξαρτώνται από την κατάσταση n του συστήματος, όπου η κατάσταση n ορίζεται ως ο αριθμός των πακέτων στο σύστημα του συνδέσμου.

Συνήθως ο ρυθμός αύξησης είναι ανεξάρτητος της κατάστασης n, δηλαδή ($\lambda^n(t) = \lambda\ (t)$ για κάθε n. Παρομοίως ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητος της κατάστασης n και ανάλογος της δυνατότητας εξυπηρέτησης του συνδέσμου, C, (εξαρτάται από την τεχνολογία του συνδέσμου), δηλαδή $\mu^n(t)=\mu C$ για κάθε n, όπου $1/\mu$ είναι το μέσο μήκος ενός πακέτου.

iii) Ορίζουμε $p^n(t)$ ως την πιθανότητα n πακέτα να βρίσκονται στο σύνδεσμο (δηλαδή ουρά + εξυπηρέτηση) στο χρόνο t.

iv) $\lambda\ (t)$ είναι ο μέσος ρυθμός άφιξης, ανεξάρτητος της κατάστασης n.

v) $\mu(t)$ είναι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης , ανεξάρτητος της κατάστασης n.

vi) K είναι ο μέγιστος αριθμός πακέτων στην ουρά του συνδέσμου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω το σύστημα του συνδέσμου, που απεικονίζεται στο Σχήμα b (στην επισυναπτόμενη εργασία), μοντελοποιείται από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dp^0(t)}{dt} = -\lambda^0(t)\,p^0(t) + \mu^1(t)\,p^1(t)$$

$$\frac{dp^n(t)}{dt} = \lambda^{n-1}(t)\,p^{n-1}(t) - \left[\lambda^n(t) + \mu^n(t)\right]p^n(t) + \mu^{n+1}(t)\,p^{n+1}(t), \qquad 0 < n < K$$

$$\frac{dp^K(t)}{dt} = \lambda^{K-1}(t)\,p^{K-1}(t) - \mu^K(t)\,p^K(t). \qquad (1)$$

Μοντέλο ΙΙ

Σε ορισμένα δίκτυα υπολογιστών οι σύνδεσμοι μπορούν να μοντελοποιηθούν από M/D/1 τύπου ουρά. Κάτω από συνθήκες σταθερής κατάστασης, (δηλ *(x(t) = 0)*, όπου $x(t) = \rho+\rho^2(2(1-\rho)$ και $\rho = \lambda(t)/\mu C$, συνιστούν το μοντέλο κατάστασης που ακολουθεί

$$\dot{x}(t) = -\mu C\left(x(t) + 1 - \sqrt{x(t)^2 + 1}\right) + \lambda(t).$$

Μοντέλο ΙΙΙ

Ένα μοντέλο για την ανάπτυξη βέλτιστου στρατηγικού ελέγχου συνδέεται με τον έλεγχο του ρυθμού άφιξης πακέτων σε ένα σύνδεσμο $\lambda(t)$, ο οποίος μεγιστοποιεί το

$$J_P = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\lambda^2(t)}{x(t)}\,dt.$$

ενώ

$$\dot{x}(t) = -\mu C\left(\frac{x(t)}{1 + x(t)}\right) + \lambda(t)$$

και

$$\lambda(t) \geq 0.$$

<u>Άσκηση 1</u>

Να εφαρμόσετε δύο αριθμητικές μεθόδους για να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα αρχικής τιμής *για* $k=20$, $\lambda^n = \lambda = 0.8$, και $\mu^n = \mu = 1$. Παρατηρήστε ότι χρειάζεστε:
α) να βρείτε τις λύσεις στο $t = 0$. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να υποθέσετε τη σχέση $\sum_{n=0}^{K} p^n = 1$.
β) να συγκρίνετε τη δική σας λύση με τη λύση $p^n(t) = \lambda^n p^0$ για $n=1,K$.
γ) να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\mathrm{L(t)} = \sum_{n=1}^{K} np^n\,(t)$ και να τη συγκρίνετε με το γράφημα του Σχ.1 στην επισυναπτόμενη εργασία.

<u>Άσκηση 2</u>

Θεωρήστε το μοντέλο ουράς του Σχ. 2(b) όταν η δυνατότητα εξυπηρέτησης του συνδέσμου είναι 1. (δηλ. $C=1$) και τα πακέτα έχουν ένα σταθερό μήκος (δηλ $\mu=1$). Υποθέστε ότι η διαδικασία άφιξης μοντελοποιείται από
$\lambda(t) = 0.5 + 0.4\sin(0.2(t+20))$. Να λύσετε το μοντέλο ΙΙ με δύο διαφορετικές ODE μεθόδους και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα με το Σχ.6 στην επισυναπτόμενη εργασία.

<u>Άσκηση 3</u> (επιπλέον μονάδες)

Να αναπτύξετε μία αριθμητική λύση του μοντέλου ΙΙΙ χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους του μοντέλου ΙΙ της άσκησης 2.