Π.Θ. ΤΗΜΜΥ | ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ | 2015-16 ΧΕΙΜ.

ΛΥΣΕΙΣ 2ου ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΑΣΚ. 1 Α

$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le \frac{N}{2}-1\\ 0, & \frac{N}{2}\le n\le N-1\end{cases} \Rightarrow DFT_N$? ($N=$ άρτιο)

- Από ορισμό DFT:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^{kn}=\frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}=\frac{1-(-1)^k}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}$$

για $k=0,1,\dots,N-1$

- Ο αριθμητής της $X[k]$ μηδενίζεται για k άρτια. Ο παρανομαστής μηδενίζεται μόνο για $k=0$.
- Άρα για $k=0$ χρειαζόμαστε τον κανόνα του De L'Hospital, και παραγωγίζοντας αριθμητή & παρονομαστή ως προς k, παίρνουμε για $k=0$: $j\pi/(j2\pi/N)=N/2$
- Συνοψίζοντας τα παραπάνω:

$$X[k]=\begin{cases}N/2, & \text{για } k=0\\ 0, & \text{για } k \text{ άρτιο}, \neq 0\\ \dfrac{2}{1-e^{-j2\pi k/N}}, & \text{για } k \text{ περιττό}\end{cases}\quad (k=0,1,\dots,N-1)$$

ΑΣΚ. 1 Β

$0\le n\le N-1$

$x[n]=\begin{cases}1, & \text{για } n \text{ άρτιο}\\ 0, & \text{για } n \text{ περιττό}\end{cases} \Rightarrow DFT_N=?$ (N άρτιο)

- Από τον ορισμό του DFT:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}=\sum_{n'=0}^{N/2-1} W_N^{2kn'}=\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{4\pi k}{N}}}\quad \left(\text{για } k=0,\dots,N-1\right)$$

- Ο αριθμητής της $X[k]$ μηδενίζεται για όλα τα k. Ο παρανομαστής μηδενίζεται μόνο για $k=0$, $k=N/2$.
- Άρα για $k=0,\frac{N}{2}$ χρειαζόμαστε τον κανόνα του De L'Hospital, και παίρνουμε $(j2\pi)/(j4\pi/N)=N/2$.
- Συνοψίζοντας λοιπόν:

$$X[k]=\begin{cases}\frac{N}{2}, & k=0, N/2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}\quad (k=0,1,\dots,N-1)$$

ΑΣΚ 2 DCT-2 της $x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le \frac{N}{2}-1\\ 0, & \frac{N}{2}\le n\le N-1\end{cases}$ (N άρτιο)

- Γνωρίζουμε ότι: $\underbrace{X_N^{C2}[k]}_{\text{DCT-2}} = 2\,\mathrm{Re}\Big\{ \underbrace{X_{2N}[k]}_{\substack{\text{2N-DFT} \\ \text{της } x[n]}} e^{-j\frac{2\pi k}{2N}} \Big\}$, $k=0,\dots,N-1$ [1]

- $$X_{2N}[k] = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} W_{2N}^{k} = \frac{1-W_{2N}^{N/2}}{1-W_{2N}} = \frac{1-e^{-j\pi k/2}}{1-e^{-j\pi k/N}} \quad [2]$$

- Για το μόνο k που μηδενίζονται αρ. & παρ. είναι το k=0, όπου:
$$X_{2N}[0] = N/2 \overset{[1]}{\Longrightarrow} X_N^{C2}[0] = 2\,\mathrm{Re}\Big\{\frac{N}{2}e^{-j0}\Big\} = N \quad [3]$$

- Για $k=1,\dots,N-1$ έχουμε από [1] & [2]:
$$X_N^{C2}[k] = 2\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{1-e^{-j\frac{\pi k}{2}}}{1-e^{-j\frac{\pi k}{N}}}\cdot\frac{1-e^{+j\frac{\pi k}{N}}}{1-e^{+j\frac{\pi k}{N}}}\cdot e^{-j\frac{2\pi k}{2N}} \right\}$$
$$= \mathrm{Re}\left\{ \frac{[1-(-j)^k]\,(-2j)\sin(\pi k/2N)}{1-\cos(\pi k/N)} \right\} =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{για } k \text{ άρτιο (διαφορετικό του 0)} \\ 2(-1)^{(k-1)/2}\cdot\dfrac{\sin(\pi k/2N)}{1-\cos(\pi k/N)}, & \text{για } k \text{ περιττό} \end{cases} \quad [4]$$

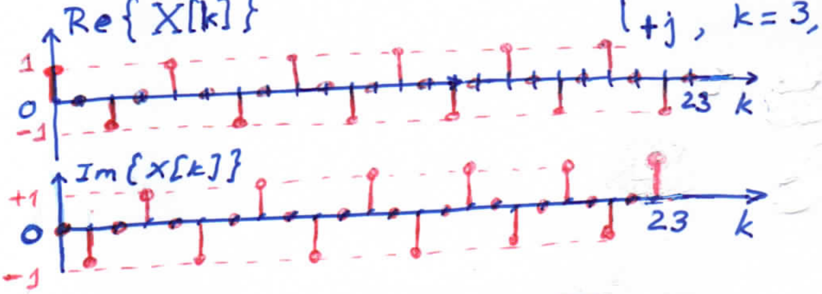
- Συνοψίζοντας, από [3] & [4]:
$$X_N^{C2}[k] = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & k \text{ άρτιο} \neq 0 \\ 2(-1)^{\frac{k-1}{2}}\dfrac{\sin(\pi k/2N)}{1-\cos(\pi k/N)}, & k \text{ περιττό} \end{cases}$$
$$k=0,1,2,\dots,N-1$$

ΑΣΚ. 3 DFT_{24} διαφόρων ακολουθιών

(a) $\boxed{x[n] = \delta[n-6]} \underset{N=24}{\Longrightarrow} X[k] = W_{24}^{6k} = e^{-j\frac{2\pi}{24}6k} = e^{-j\frac{\pi k}{2}} = (-j)^k$

$k = 0, 1, 2, \ldots, 23$

$$\Longrightarrow X[k] = \begin{cases} 1, & k = 0, 4, 8, 12, 16, 20 \\ -j, & k = 1, 5, 9, 13, 17, 21 \\ -1, & k = 2, 6, 10, 14, 18, 22 \\ +j, & k = 3, 7, 11, 15, 19, 23 \end{cases}$$

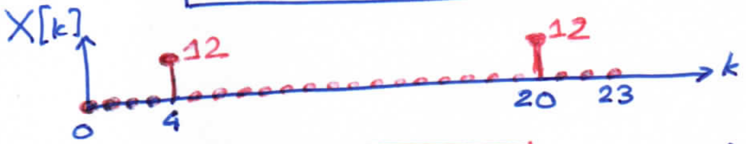


(b) $\boxed{x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right), \ 0 \le n \le 23}$

$$x[n] = \cos\frac{\pi n}{3} = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi n}{3}} + e^{-j\frac{\pi n}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}4n} + e^{-j\frac{2\pi}{24}4n}\right)$$

$$\Longrightarrow DFT\{x[n]\} = \frac{24}{2}\left[\delta(\langle k-4\rangle_{24}) + \delta(\langle k+4\rangle_{24})\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{X[k] = 12\,\delta[k-4] + 12\,\delta[k-20]}, \ 0 \le k \le 23$$



(c) $\boxed{x[n] = \delta[n] + \delta[n-12]} \Longrightarrow X[k] = W_{24}^{0k} + W_{24}^{12k} = 1 + e^{-j\pi k} = 1 + (-1)^k$

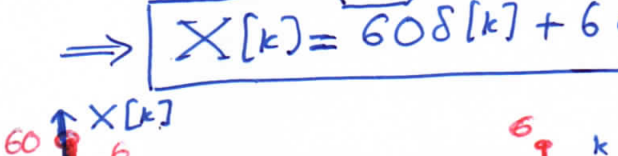
$$= \begin{cases} 2, & k \text{ άρτιο} \\ 0, & k \text{ περιττό} \end{cases}, \ \text{με } 0 \le k \le 23$$

(d) $\boxed{x[n] = 2 + \cos^2(\pi n/12), \ 0 \le n \le 23}$

$$x[n] = 2 + \frac{1 + \cos(2\pi n/12)}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}2n} + e^{-j\frac{\pi n}{6}}\right)$$

$$\Longrightarrow X[k] = \frac{5}{2}24\,\delta[k] + \frac{24}{4}\delta[k-2] + \frac{24}{4}\delta[\langle k+2\rangle_{24}] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{X[k] = 60\,\delta[k] + 6\,\delta[k-2] + 6\,\delta[k-22]}, \ 0 \le k \le 23$$



ΑΣΚ. 4 A

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \textcircled{N} \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) = ?$$

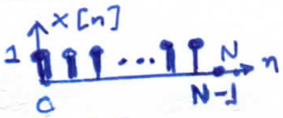
→ ορισμένες εντός $[0, N-1]$

- Συμβολίζουμε $x[n] = \cos\frac{2\pi n}{N}$, $0 \le n \le N-1$; $y[n] = \sin\frac{2\pi n}{N}$, $0 \le n \le N-1$;
  και $z[n] = x[n] \textcircled{N} y[n]$
- Από τις ιδιότητες DFT, $Z[k] = X[k]\,Y[k]$, $0 \le k \le N-1$
  οπότε $z[n] = IDFT_N\{X[k]\,Y[k]\}$, $0 \le n \le N-1$
- Έχουμε:
  $$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}1n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}1n}\right) \Rightarrow X[k] = \frac{N}{2}\left(\delta[k-1] + \delta[k-(N-1)]\right)$$
  $$y[n] = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}1n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}1n}\right) \Rightarrow Y[k] = \frac{N}{2j}\left(\delta[k-1] - \delta[k-(N-1)]\right)$$
- Συνεπώς:
  $$Z[k] = \frac{N}{2} \cdot \frac{N}{2j}\left(\delta[k-1] - \delta[k-(N-1)]\right) = \frac{N}{2}\, DFT_N\left\{\sin\frac{2\pi n}{N}\right\}$$
- Άρα:
  $$\boxed{z[n] = \frac{N}{2}\sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \;;\; 0 \le n \le N-1}$$

ΑΣΚ. 4 B

$$(u[n]-u[n-N]) \textcircled{N} (u[n-N]-u[n]) = ?$$

- Σήμα: $x[n] = u[n] - u[n-N]$



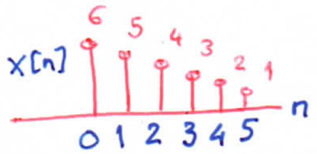
$\Rightarrow X[k] = N\delta[k]$

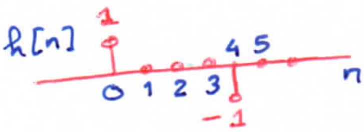
  Σήμα: $y[n] = u[n-N] - u[n]$

$\Rightarrow Y[k] = -N\delta[k]$

- Συνεπώς, αν $z[n] = x[n] \textcircled{N} y[n]$,
  $$Z[k] = X[k]\,Y[k] = -N^2\delta[k] = -N \cdot DFT_N\{u[n] - u[n-N]\}$$
- Άρα,
  $$\boxed{z[n] = -N u[n] + N u[n-N] = -N \;;\; 0 \le n \le N-1}$$

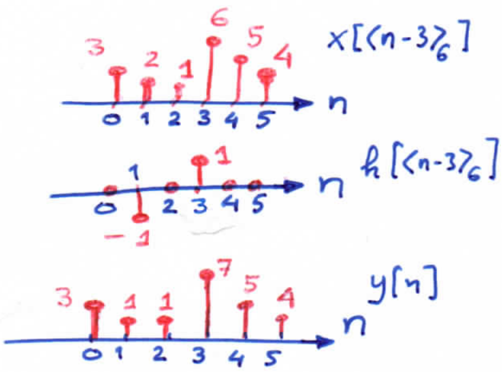
ΑΣΚ 5





$N=6$

(A) $y[n]=?$, με $Y[k]=(-1)^k X[k] + (-1)^k H[k]$, $0 \le k \le 5$



$$(-1)^k X[k] = e^{-j\frac{2\pi}{6}3k} \cdot X[k] \xleftrightarrow{DFT_6} x[\langle n-3 \rangle_6]$$

$$(-1)^k H[k] = \;\cdots\cdots \xleftrightarrow{DFT_6} h[\langle n-3 \rangle_6]$$

Άρα:

$$\boxed{\begin{aligned} y[n] &= x[\langle n-3\rangle_6] + h[\langle n-3\rangle_6] \\ &= 3\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \\ &\quad + 7\delta[n-3] + 5\delta[n-4] + 4\delta[n-5] \end{aligned}}$$

(B) $y[n]=?$ με $Y[k]=X[k]H[k]$, $0 \le k \le 5$

$y[n] = x[n] \circledast_6 h[n]$ → ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ $(N=6)$

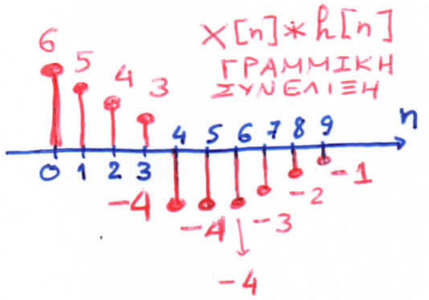
- Μπορούμε να βρούμε την γραμμική συνέλιξη πρώτα, $y'[n] = x[n] * h[n]$ και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε αναδίπλωση με $N=6$
- Έχουμε:

$$\begin{aligned} y'[n] &= x[n]*\delta[n] - x[n]*\delta[n-4] = \\ &= 6\delta[n] + 5\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5] \\ &\quad - 6\delta[n-4] - 5\delta[n-5] \\ &\quad - 4\delta[n-6] - 3\delta[n-7] - 2\delta[n-8] \\ &\quad - \delta[n-9] \Rightarrow \end{aligned}$$

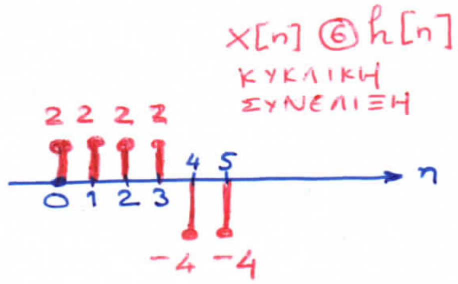
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x[n]*h[n] &= 6\delta[n] + 5\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 3\delta[n-3] - 4\delta[n-4] - 4\delta[n-5] \\ &\quad - 4\delta[n-6] - 3\delta[n-7] - 2\delta[n-8] - \delta[n-9] \end{aligned}}$$

- Στη συνέχεια, με χρονική αναδίπλωση $(N=6)$:

$$\boxed{\begin{aligned} y[n] = x[n] \circledast_6 h[n] &= 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] \\ &\quad - 4\delta[n-4] - 4\delta[n-5] \end{aligned}}$$

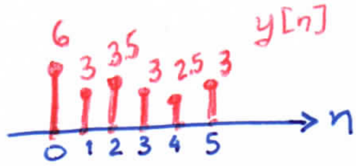


ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΝΑΔΙΠΛΩΣΗ



(C) $y[n]=?$, με $Y[k]=Re\{X[k]\}+j\,Im\{H[k]\}$, $0\le k\le 5$

- Από ιδιότητες συμμετρίας έχουμε



$$Re\{X[k]\} \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{2}\{x[n]+x^*[\langle -n\rangle_N]\}$$

$$j\,Im\{H[k]\} \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{2}\{h[n]-h^*[\langle -n\rangle_N]\}$$

- Λόγω πραγματικών $x[n]$, $h[n]$, γραμμικότητας, και με $N=6$ έχουμε τελικά:

$$y[n]=\frac{1}{2}\left[x[n]+x[\langle -n\rangle_6]+h[n]-h[\langle -n\rangle_6]\right]$$

$$=\left(6\delta[n]+3\delta[n-1]+3\delta[n-2]+3\delta[n-3]+3\delta[n-4]+3\delta[n-5]\right)$$

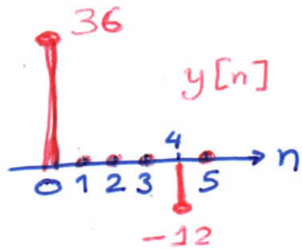
$$+\frac{1}{2}\left(\delta[n-2]-\delta[n-4]\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n]=6\delta[n]+3\delta[n-1]+3.5\delta[n-2]+3\delta[n-3]+2.5\delta[n-4]+3\delta[n-5]}$$

(D) $y[n]=?$, με $Y[k]=H[k]\ ⑥\ X[k]$, $0\le k\le 5$

- Από δυικότητα ιδιότητας γινομένου/κυκλ. συνέλιξης, έχουμε:

$$\underset{0\le n\le 5}{y[n]=6\,x[n]\,h[n]} \xleftrightarrow{DFT_6} X[k]\ ⑥\ H[k]$$



- Συνεπώς:

$$\boxed{y[n]=36\delta[n]-12\delta[n-4]}$$

(E) $y[n]=?$, με $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

- Από ιδιότητα DTFT συνέλιξης:

$$y[n]=\underbrace{x[n]*h[n]}_{\text{γραμμική συνέλιξη}}$$

- Η απάντηση ως σχήμα έχει δοθεί στο 5(B) [αριστερό σχήμα].

ΑΣΚ. 6

$$\left.\begin{aligned} x[n] &= u[n] - u[n-100] \\ h[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x[n] * h[n] = ?$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ OVERLAP-ADD ($L=10$)

- Αναπαραστούμε το $x[n]$ ως άθροισμα υπο-τμημάτων μήκους $L=10$,

$$x[n] = \sum_{r=0}^{9} x_r[n - r10]$$

όπου (για $r = 0, 1, \ldots, 9$) $x_r[n] = \begin{cases} x[n + r10], & 0 \le n \le 9 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = u[n] - u[n-10]$

Η τελευταία ισότητα τυχαίνει να ισχύει λόγω του ότι το $x[n]$ είναι σταθερό σήμα στον χρόνο (μαζί με την επιλογή του $L=10$, που δίνει 10 ισομήκη υποσήματα $x_r[n]$).

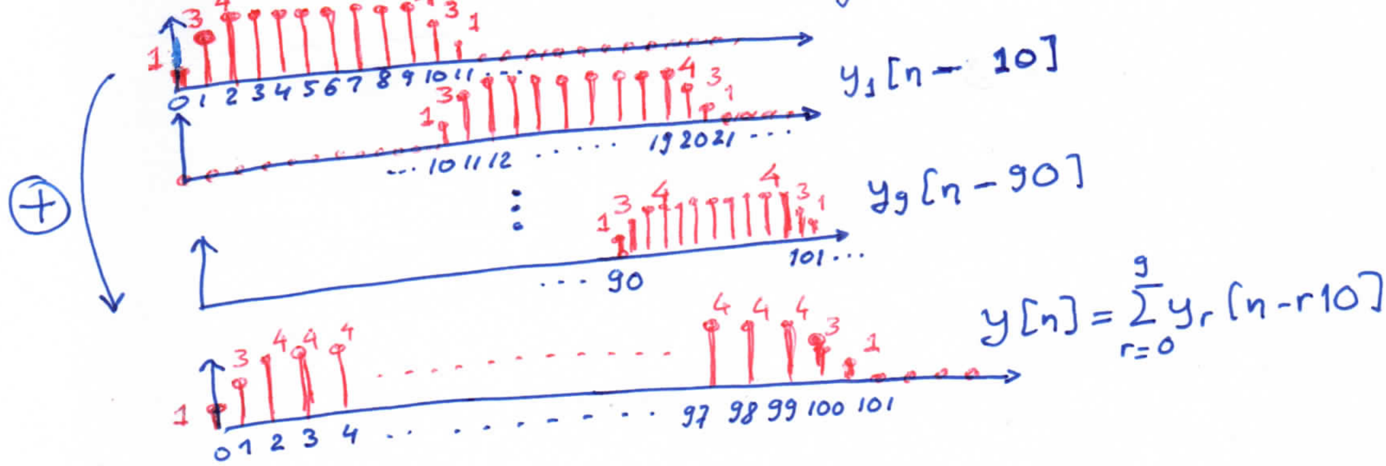
- Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις γραμμικές συνελίξεις $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$ (συνολικού μήκους $10+3-1 = 12$ δειγμάτων). Πρόκειται φυσικά για μία συνέλιξη, καθώς έτυχε όλα τα $x_r[n]$ να είναι ίσα μεταξύ τους.

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι: $y_r[n] = x_r[n] * h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 11 \\ 3, & n = 1, 10 \\ 4, & n = 2, \ldots, 9 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$

- Τέλος, αθροίζοντας, $y[n] = \sum_{r=0}^{9} y_r[n - r10]$

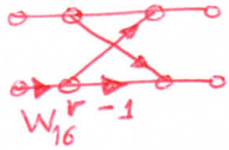
$$\Longrightarrow y[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ 4, & n = 2, 3, \ldots, 99 \\ 3, & n = 100 \\ 1, & n = 101 \end{cases}$$

- Η διαδικασία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΑΣΚ. 7

FFT (N=16)



ⓐ Πόσα βήματα?
ⓑ Τιμές r
ⓒ Στάδιο με r=2

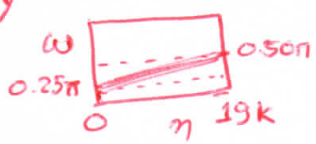
- Με βάση τον αλγόριθμο υλοποίησης FFT αποδεκατισμού στον χρόνο, είναι εύκολο να δούμε πως έχουμε 4 συνολικά στάδια/βήματα ($\log_2 16 = 4$ ή $2^4 = 16$).
- Σε κάθε στάδιο, έχουμε:

  1° ΣΤΑΔΙΟ: $r=0$
  2° ΣΤΑΔΙΟ: $r=0,4$
  3° ΣΤΑΔΙΟ: $r=0,2,4,6$.
  4° ΣΤΑΔΙΟ: $r=0,1,2,3,4,5,6,7$.

- Κατά συνέπεια, η πεταλούδα του σχήματος με $r=2$ συναντάται μόνο στο 3° & 4° ΣΤΑΔΙΟ του διαγράμματος υλοποίησης.

ΑΣΚ. 8Α

$x[n] = \sin\left(\omega_0 n + \frac{\lambda n^2}{2}\right)$



- Η στιγμιαία συχνότητα του παραπάνω σήματος chirp ισούται με $\boxed{\omega_i[n] = \omega_0 + \lambda n}$

- Κατά συνέπεια, στο φασματόγραμμα περιμένουμε να δούμε προσεγγιστικά μία ευθεία γραμμή που περνάει από το ω_0 για $n=0$ και έχει κλίση λ (το ακριβές φασματόγραμμα φυσικά θα εξαρτάται από τις επιλογές του παραθύρου και των τιμών R, L, N).
- Προσεγγιστικά, λοιπόν, από το σχήμα έχουμε:

$$\boxed{\omega_0 = 0.25\pi} \quad \& \quad \lambda = \frac{0.5\pi - 0.25\pi}{19{,}000} = \boxed{4.1 \times 10^{-5}}$$

ΑΣΚ. 8Β

$\left.\begin{array}{l} W^{(64)}_{RECT}[n] \\ x[n] = \cos\frac{\pi n}{4} + \cos\frac{17\pi n}{64} \end{array}\right\} \to$ DFT $\to$ διαχωρίσιμες κορυφές ?

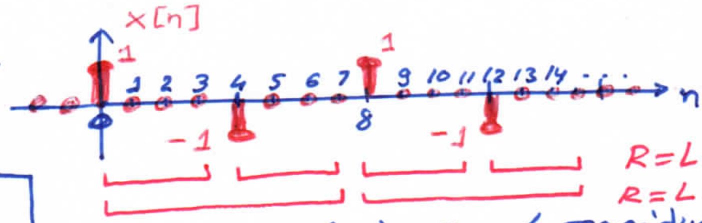
- Οι συχνότητες των δύο συνιστωσών διαφέρουν κατά $\Delta\omega = \left|\frac{\pi}{4} - \frac{17\pi}{64}\right| = \frac{\pi}{64}$
- Η διαφορά αυτή είναι πολύ μικρότερη από το πλάτος του κυρίου λοβού του ορθ. παραθύρου μήκους 64, δηλ. του $\Delta\omega^{(64)}_{RECT} = \frac{4\pi}{64}$
- Συνεπώς, <u>δεν</u> αναμένουμε να δούμε δύο διαχωρίσιμες κορυφές!

ΑΣΚ. 9

$$x[n] = \sum_{\ell=0}^{3} (-1)^{\ell}\, \delta[n-4\ell] \Rightarrow X_r[k] = ?$$

(a) $N=L=R=4$ ΟΡΘ. ΠΑΡΑΘ.
(b) $N=L=R=8$

• Σχεδιασμός σήματος:



(a) Φασματόγραμμα με ορθ. παράθυρο και $N=R=L=4$.

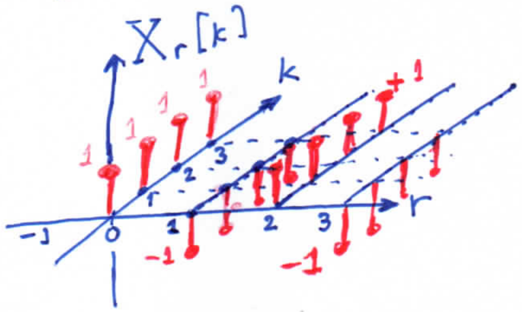
• Με $R=L=4$ έχουμε 4 παράθυρα με μη μηδενικό σήμα $(r=0,1,2,3)$, δηλαδή το $+\delta[n]$ (για $r=0,2$) ή το $-\delta[n]$ (για $r=1,3$).

• Με $N=4$ οι αντίστοιχοι DFTs είναι $+1$ ή -1 για όλα τα k $(k=0,1,2,3)$.

• Συνεπώς, το φασματόγραμμα είναι:

$$X_r[k] = \begin{cases} (-1)^r, & r=0,1,2,3;\ k=0,1,2,3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπως έχει σχεδιαστεί αριστερά.



(β) Φασματόγραμμα με ορθ. παράθυρο και $N=R=L=8$.

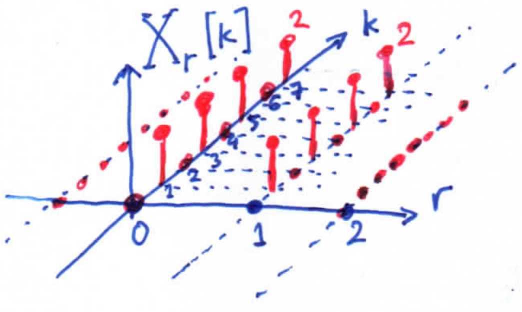
• Με $R=L=8$ έχουμε 2 παράθυρα με μη μηδενικό σήμα $(r=0,1)$, δηλαδή το $\delta[n]-\delta[n-4]$

• Με $N=8$, ο DFT του σήματος αυτού είναι ο $1-(-1)^k$, $k=0,1,\ldots,7$, δηλ: $\begin{cases} 0, & k=0,2,4,6 \\ 2, & k=1,3,5,7 \end{cases}$

• Συνεπώς, το φασματόγραμμα είναι:

$$X_r[k] = \begin{cases} 2, & r=0,1;\ k=1,3,5,7 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπως έχει σχεδιαστεί αριστερά.



ΑΣΚ. 10

$X_r[k] = 2$, $r = -\infty \dots +\infty$
$k = 0, 2$
$L = N = 4$
$R = 2$
ορθ. παραθ.

$\Longrightarrow x[n] = ?$
Overlap-Add Synthesis

- Έχουμε $x_r[m] = x[r2+m]\, w_4^{(rect)}[m] = IDFT\{[2,0,2,0]\}$, $0 \le m \le 3$

$$= \delta[m] + \delta[m-2]$$

- Συνεπώς $\hat{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_r[n-2r] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left(\delta[n-2r] + \delta[n-2r-2]\right)$

$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\delta[n-2r] \quad (1)$$

- Επίσης $\tilde{w}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} w_4^{(RECT)}[n-2r] = 2, \ \forall n \quad (2)$

- Καθώς: $\hat{x}[n] = x[n]\,\tilde{w}[n]$, από (1) & (2) παίρνουμε:

$$\boxed{x[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2\ell]}$$