 2ο Σύνολο Ασκήσεων

Λεπτομέρειες του ακριβούς τρόπου παράδοσης θα ανακοινωθούν έγκαιρα.
Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι **ατομικές**.

Άσκηση 1: Υπολογίστε τον DFT, $X[k]$ για $0 \le k \le N-1$, των σημάτων διακριτού χρόνου $x[n]$, πεπερασμένης διάρκειας ($0 \le n \le N$), με N άρτιο:

(a) $$x[n] = \begin{cases} 1\,, & \text{για} \quad 0 \le n \le (N/2)-1 \\ 0\,, & \text{για} \quad N/2 \le n \le N-1 \end{cases} .$$

(b) $$x[n] = \begin{cases} 1\,, & \text{για } n \text{ άρτιο εντός } [\,0\,, N-1\,] \\ 0\,, & \text{για } n \text{ περιττό εντός } [\,0\,, N-1\,] \end{cases} .$$

Απλοποιείστε κατάλληλα τις εκφράσεις που θα λάβετε για διάφορες τιμές του k, π.χ., για $k = 0$, $k = N/2$, k άρτιο, και k περιττό.

Άσκηση 2: Υπολογίστε το μετασχηματισμό συνημίτονου, DCT-2, του σήματος διακριτού χρόνου $x[n]$, πεπερασμένης διάρκειας ($0 \le n \le N$), με N άρτιο:

$$x[n] = \begin{cases} 1\,, & \text{για} \quad 0 \le n \le (N/2)-1 \\ 0\,, & \text{για} \quad N/2 \le n \le N-1 \end{cases} .$$

Άσκηση 3: Υπολογίστε και σχεδιάστε τους DFT μήκους $N = 24$ των ακολουθιών:

(a) $x[n] = \delta[n-6]$.

(b) $x[n] = \cos(\pi n/3)$, για $0 \le n \le 23$.

(c) $x[n] = \delta[n] + \delta[n-12]$.

(d) $x[n] = 2 + \cos^2(\pi n/12)$, για $0 \le n \le 23$.

Άσκηση 4: Υπολογίστε τις κυκλικές συνελίξεις:

(a) $\cos(2\pi n/N) \; Ⓝ \; \sin(2\pi n/N)$.

(b) $(u[n] - u[n-N]) \; Ⓝ \; (u[n-N] - u[n])$.

Στα παραπάνω, το Ⓝ συμβολίζει κυκλική συνέλιξη μήκους N. Επίσης, οι ακολουθίες που συνελίσονται θεωρούνται μηδενικές εκτός του διαστήματος $[\,0\,, N-1\,]$.

Άσκηση 5: Δίνονται οι δύο ακολουθίες πεπερασμένου μήκους $x[n]$ και $h[n]$ του παρακάτω σχήματος. Έστω επίσης $X[k]$ και $H[k]$ οι διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier (DFT) τους, μήκους $N = 6$ δειγμάτων, αντίστοιχα, όπως επίσης και οι μετασχηματισμοί Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) τους, $X(e^{j\omega})$ και $H(e^{j\omega})$, αντίστοιχα. Σχεδιάστε τις ακολουθίες διακριτού χρόνου και πεπερασμένου μήκους που έχουν:

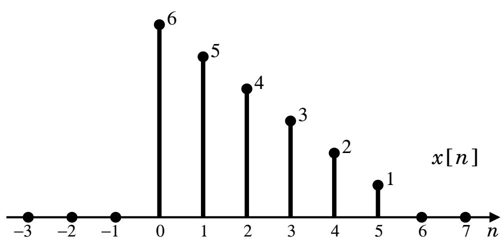
(a) DFT μήκους $N = 6$ που ισούται με $(-1)^k X[k] + (-1)^k H[k]$, για $0 \leq k \leq N-1$.

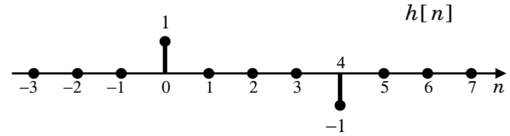
(b) DFT μήκους $N = 6$ που ισούται με $X[k]\, H[k]$, για $0 \leq k \leq N-1$.

(c) DFT μήκους $N = 6$ που ισούται με $\mathcal{R}eal\,\{\, X[k] \,\} + j\, \mathcal{I}mag\,\{\, H[k] \,\}$.

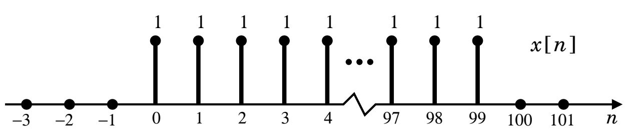
(d) DFT μήκους $N = 6$ ίσο με $X[k]$ ⑥ $H[k]$ (όπου ⑥ υποδηλώνει κυκλική συνέλιξη).

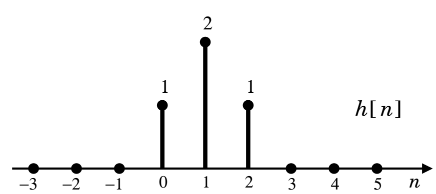
(e) DTFT ίσο με το γινόμενο $X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})$.





Άσκηση 6: Υπολογίστε τη *γραμμική* συνέλιξη $y[n] = x[n] * h[n]$ των σημάτων του παρακάτω σχήματος ακολουθώντας τη μεθοδολογία του αλγόριθμου *επικάλυψης–πρόσθεσης* (overlap-add method). Για το σκοπό αυτό, θεωρήστε διαδοχικές υποακολουθίες του σήματος $x[n]$, μήκους $L = 10$ κάθε φορά. Εξηγείστε αναλυτικά.



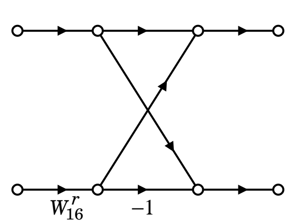


Άσκηση 7: Το διάγραμμα ροής πεταλούδας (butterfly) του παρακάτω σχήματος αποτελεί τμήμα της υλοποίησης του αλγορίθμου FFT με αποδεκατισμό στον χρόνο (decimation in time), για μήκος μετασχηματισμού $N = 16$ (υπενθυμίζουμε το συμβολισμό $W_N = e^{-j/(2\pi N)}$).

(a) Πόσα είναι τα στάδια/βήματα του διαγράμματος υλοποίησης του FFT;

(b) Ποιες είναι οι πιθανές τιμές του r για κάθε ένα από τα στάδια/βήματα αυτά;

(c) Σε ποια στάδια υπάρχουν πεταλούδες με τιμή $r = 2$;

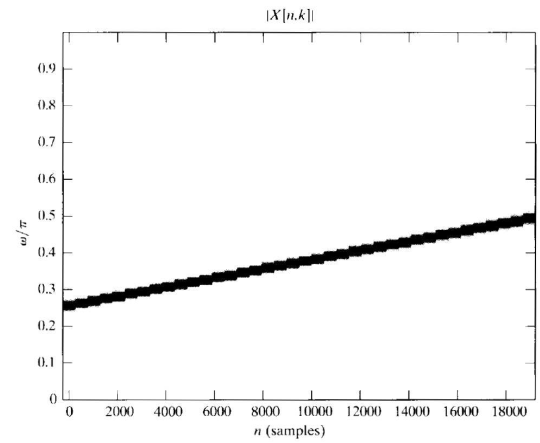


Άσκηση 8: Τα παρακάτω είναι ανεξάρτητα ερωτήματα:

(a) Βρείτε προσεγγιστικά τις παραμέτρους ω_0 και λ του σήματος

$$x[n] \,=\, \sin\left(\omega_0\, n \,+\, \frac{1}{2}\,\lambda\, n^{\,2}\right)$$

(chirp signal) από το φασματόγραμμά του (spectrogram), που έχει σχεδιαστεί στο παρακάτω σχήμα (σκούρες περιοχές υποδηλώνουν μεγάλες τιμές του μέτρου του DFT).



(b) Επιθυμούμε να σχεδιάσουμε το φάσμα του σήματος διακριτού χρόνου

$$x[n] = \cos\left(\pi\, n/4\right) \,+\, \cos\left(17\,\pi\, n/64\right) \ ,$$

χρησιμοποιώντας ένα ορθογώνιο παράθυρο $w[n]$ με μήκος 64, και διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) μήκους επίσης 64. Εξηγήστε εάν αναμένεται να διακρίνονται δύο διαχωρίσιμες κορυφές που αντιστοιχούν στις συχνότητες των δύο συνημιτόνων, ή όχι.

Άσκηση 9: Έστω το σήμα $x[n] \,=\, \sum_{l=0}^{3} (-1)^{\,l}\, \delta\,[\,n - 4\,l\,]$. Σχεδιάστε το σήμα και στη συνέχεια το φασματόγραμμά του (3D):

$$X_r[\,k\,] = \sum_{m=0}^{L-1} x[\,rR + m\,]\, w[\,m\,]\, e^{\,-\,j\,(2\,\pi/N)\,k\,m}$$

(για $-\infty < r < \infty$ και $0 \leq k \leq N-1$, όπου το $w[n]$ είναι το ορθογώνιο παράθυρο μήκους L), υπολογίζοντας τις τιμές του για τις εξής δύο περιπτώσεις:

(a) $N = L = R = 4$.

(b) $N = L = R = 8$.

Άσκηση 10: Έστω οι μη μηδενικές τιμές του φασματογράμματος ενός σήματος:

$$X_r[\,k\,] \,=\, 2 \ \ , \ \text{για}\ \ r \,=\, -\,\infty\,,\ldots,+\,\infty\,, \ \ \text{και}\ \ k \,=\, 0\,,2\,,$$

υπολογισμένες με *ορθογώνια* παράθυρα μήκους $L = 4$, μετατοπιζόμενα κατά $R = 2$, και DFT με $N = 4$. Ανακατασκευάστε το σήμα χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία του αλγόριθμου *επικάλυψης−πρόσθεσης* (overlap-add reconstruction).