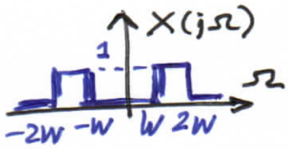
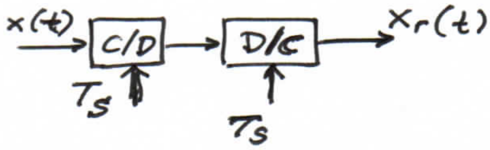
Π.Θ. ΤΗΜΜΥ | ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ | 2015-16

ΛΥΣΕΙΣ 1ου ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ | ΧΕΙΜ.

ΑΣΚΗΣΗ 1





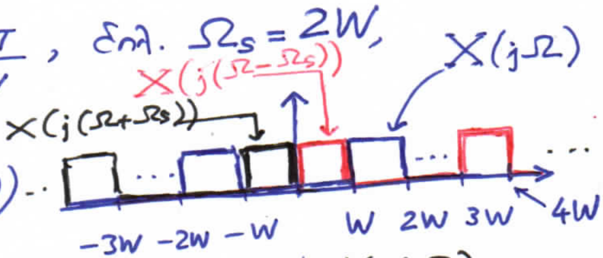
(i) Παρατηρούμε ότι το φάσμα $X(j\Omega)$ μπορεί να γραφεί ως η διαφορά δύο φασμάτων-παλμών μεταξύ $\pm 2W$ & $\pm W$. Άρα, από το τυπολόγιο,

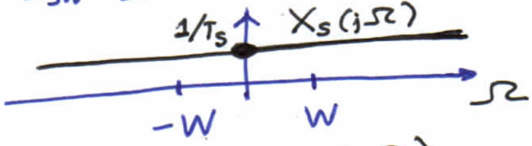
$$x(t) = \frac{\sin(2Wt) - \sin(Wt)}{\pi t} = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}\left[2\cos(Wt) - 1\right]$$

(ii) Για να επιτευχθεί ανακατασκευή χωρίς αναδίπλωση, χρησιμοποιώντας την κλασσική προσέγγιση (χρήση κατωπερατού φίλτρου με αποκοπή στο $\pm\Omega_s/2$ και κέρδος T_s) θα πρέπει σύμφωνα με το θεώρημα Shanon:

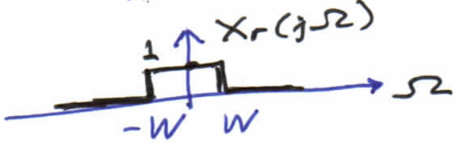
$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\Omega_{max} = 4W \Leftrightarrow \boxed{T_s \leq \frac{\pi}{2W}}, \text{ άρα } \boxed{T_s^{(max)} = \frac{\pi}{2W}}$$

(iii) Με δειγματοληψία $T_s = 2T_s^{(max)} = \frac{\pi}{W}$, δηλ. $\Omega_s = 2W$, το σήμα $x_s(t) = x(t)s(t)$ θα έχει φάσμα $X_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\Omega - k2W))$ όπως στο σχήμα δεξιά.

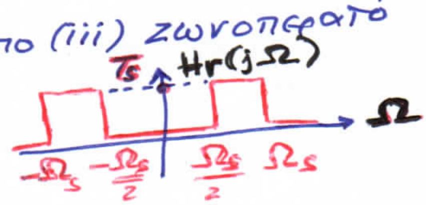




- Μετά από κατωπερατό φιλτράρισμα με αποκοπή στο $\Omega_s/2 = W$ & κέρδος T_s, στην έξοδο θα πάρουμε παλμό μοναδιαίου κέρδους μεταξύ των $\pm W$, άρα $\boxed{x_r(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t}}$ (προφανώς έχουμε αναδίπλωση).



(iv) Αν για την ανακατασκευή χρησιμοποιούσαμε στο (iii) ζωνοπερατό φίλτρο $H_r(j\Omega)$ όπως στο σχήμα ($\Omega_s = 2W$), στην έξοδο θα παίρναμε $X_r(j\Omega) = X(j\Omega)$, δηλαδή ανακατασκευή χωρίς αναδίπλωση ($x_r(t) = x(t)$).



ΑΣΚΗΣΗ 2

FILTERBANK:

$$h_0[n] = \frac{1}{2}\left(\delta[n] + \delta[n-1]\right) \; ; \; h_1[n] = (-1)^n h_0[n]$$

$$g_0[n] = 2h_0[n] \; ; \; g_1[n] = -2h_1[n]$$

(i) Με βάση τα δεδομένα της άσκησης, έχουμε:

$$H_0(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-j\omega}\right), \quad H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-j\omega}\right)$$

$$G_0(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega}, \quad G_1(e^{j\omega}) = -1 + e^{-j\omega}$$

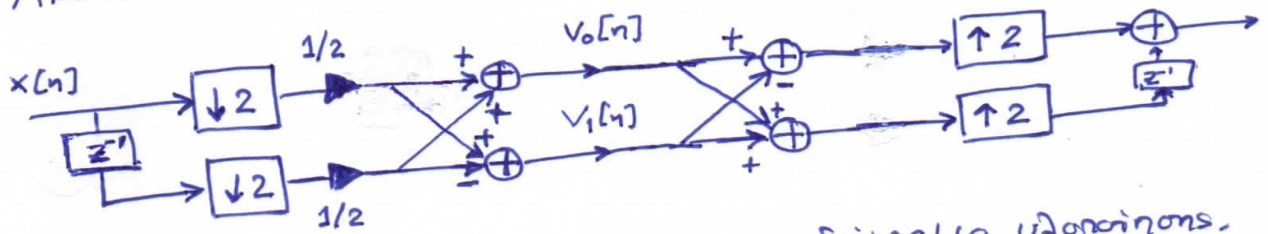
Παρατηρούμε πως (βλέπε (4.111)):

$$\frac{1}{2}\left[G_0(e^{j\omega})H_0(e^{j\omega}) + G_1(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})\right] = \frac{1}{4}\left((1+e^{-j\omega})^2 - (1-e^{-j\omega})^2\right) = e^{-j\omega}$$

$$\frac{1}{2}\left[G_0(e^{j\omega})H_0(e^{j(\omega-\pi)}) + G_1(e^{j\omega})H_1(e^{j(\omega-\pi)})\right] = \frac{1}{4}\left[(1+e^{-j\omega})(1-e^{-j\omega}) + (-1+e^{-j\omega})(1+e^{-j\omega})\right] = 0$$

Άρα (βλέπε (4.111)): $\boxed{Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}X(e^{j\omega})}$, δηλ: $\boxed{y[n] = x[n-1]}$

(ii) Ακολουθώντας το σχήμα 4.46, έχουμε:



(iii) Μπορούμε να δούμε την απάντηση από το διάγραμμα υλοποίησης, ή αλλιώς στο πεδίο του Μ/Σ. Διαλέγοντας τον δεύτερο τρόπο:

$x[n] = 1 = e^{j0n} \Rightarrow$ έξοδος του $h_0[n]$: $e^{j0n}\frac{1}{2}\left(1 + e^{-j0}\right) = 1$

έξοδος του $h_1[n]$: $e^{j0n}\frac{1}{2}\left(1 - e^{-j0}\right) = 0$

και κατά συνέπεια, μετά το downsampling, $\boxed{v_0[n] = 1 \; ; \; v_1[n] = 0}$

• Αντίστοιχα:

$x[n] = e^{j\pi n} \Rightarrow$ έξοδος του $h_0[n]$: $e^{j\pi n}\frac{1}{2}\left(1 + e^{-j\pi}\right) = 0$

έξοδος του $h_1[n]$: $e^{j\pi n}\frac{1}{2}\left(1 - e^{-j\pi}\right) = (-1)^n$

και κατά συνέπεια, μετά το downsampling, $\boxed{v_0[n] = 0 ; \; v_1[n] = 1}$

ΑΣΚΗΣΗ 3 $\quad h[n] \rightarrow H(e^{j\omega}),\ \tau(\omega)$

Έχουμε από τις τιμές του $h[n]$ του σχήματος:

$$H(e^{j\omega}) = -e^{j\omega} + 1 + 2e^{-j\omega} - 2e^{-j2\omega} - e^{-j3\omega} + e^{-j4\omega}$$

$$= -e^{-j\frac{3\omega}{2}}\left[e^{j\frac{5\omega}{2}} - e^{-j\frac{5\omega}{2}}\right] + e^{-j\frac{3\omega}{2}}\left[e^{j\frac{3\omega}{2}} - e^{-j\frac{3\omega}{2}}\right]$$

$$+ 2e^{-j\frac{3\omega}{2}}\left[e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right] \Rightarrow$$

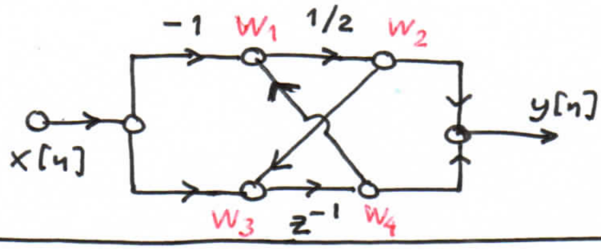
$$\boxed{H(e^{j\omega}) = 2j\, e^{-j\frac{3\omega}{2}}\left(-\sin\frac{5\omega}{2} + \sin\frac{3\omega}{2} + 2\sin\frac{\omega}{2}\right)}$$

- Κατά συνέπεια: $\measuredangle H(e^{j\omega}) = -\frac{3\omega}{2} + \frac{\pi}{2} \pm k\pi$

και παραγωγίζοντας, $\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\measuredangle H(e^{j\omega}) = \frac{3}{2}$

- Αυτό ήταν φυσικά αναμενόμενο λόγω της αντι-συμμετρίας ως προς $n = 1.5 = 3/2$ της κρουστικής απόκρισης.

ΑΣΚΗΣΗ 4



$H(z) = ?$

- Θέτοντας τις 4 βοηθητικές μεταβλητές, $w_1[n], w_2[n], w_3[n], w_4[n]$ στο σχήμα, γράφουμε τις σχέσεις εισόδου-εξόδου (στο πεδίο του Μ/Σ Z):

$$\left.\begin{aligned} W_1(z) &= -X(z) + W_4(z) \\ W_2(z) &= \frac{1}{2} W_1(z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_2(z) = \frac{1}{2}\left(W_4(z) - X(z)\right)$$

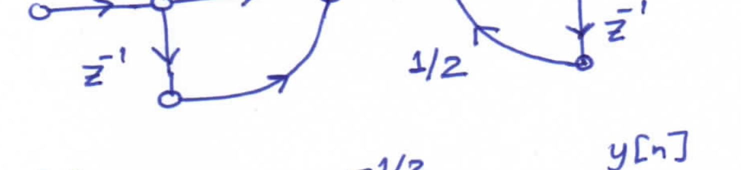
$$\left.\begin{aligned} W_3(z) &= X(z) + W_2(z) \\ Y(z) &= W_2(z) + W_4(z) \quad (1) \\ W_4(z) &= z^{-1} W_3(z) \end{aligned}\right] \Rightarrow W_4(z) = z^{-1}\left(X(z) + W_2(z)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_2(z) = \dfrac{\frac{1}{2}(z^{-1} - 1)}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \cdot X(z) & (2) \\[2ex] W_4(z) = \dfrac{\frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \cdot X(z) & (3) \end{cases}$$

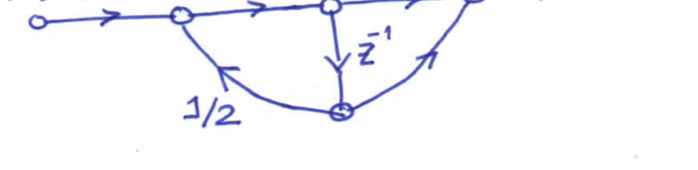
Είναι "ALL-PASS"

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} - 1/2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}} \Rightarrow \boxed{|H(e^{j\omega})| = 1 \text{ για όλα τα } \omega}$$

- Διαγράμματα υλοποίησης:

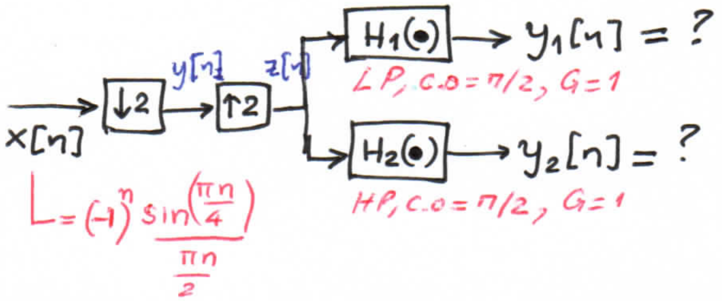


ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ Ι



ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΙΙ

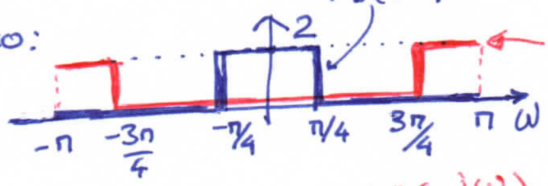
ΑΣΚΗΣΗ 5



• Βρίσκουμε πρώτα το φάσμα του $x[n] = (-1)^n x_1[n]$, όπου $x_1[n] = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{(\pi n)/2}$

$= e^{j\pi n}$

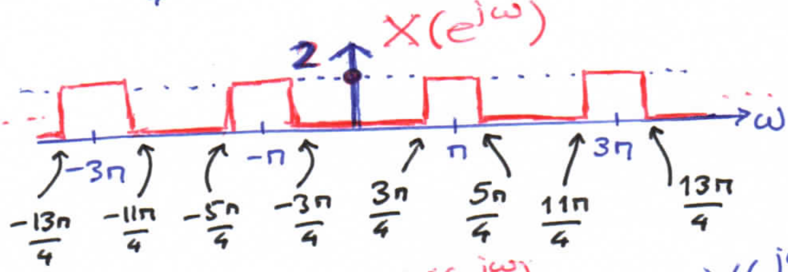
Από το τυπολόγιο:



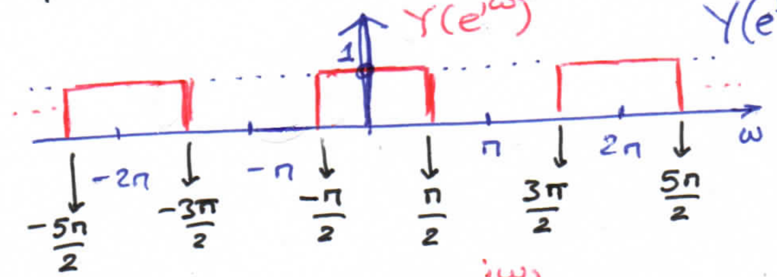
$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j(\omega-\pi)})$

(φυσικά περιοδικά!)

• Άρα:



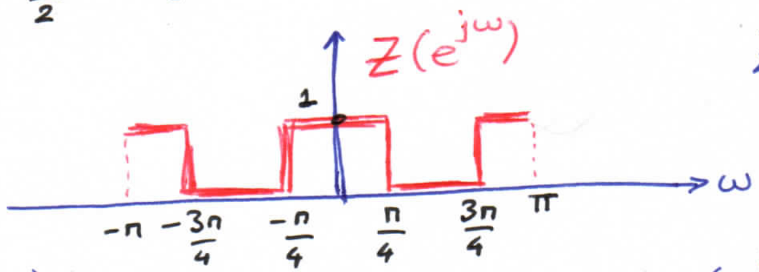
↓2



$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)})\right]$

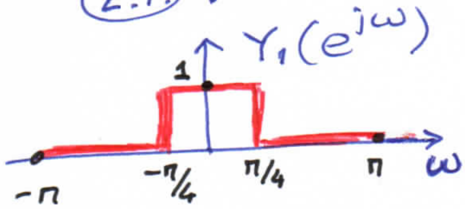
↑2

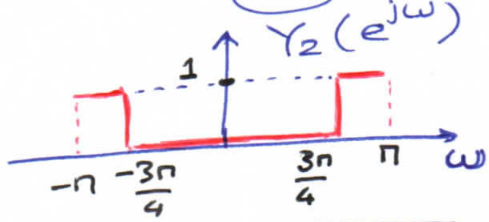
$Z(e^{j\omega}) = Y(e^{2j\omega})$



$H_1(e^{j\omega})$ L.P.

$H_2(e^{j\omega})$ H.P.





IDTFT

IDTFT

• Οπότε, $\boxed{y_1[n] = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n}}$ $\boxed{y_2[n] = (-1)^n y_1[n]}$

ΑΣΚΗΣΗ 6

POLES $= \{0, \pm 1/3\}$

ZEROS $= \{-\frac{7}{9}, \pm 2j\}$

$(-1)^n \to \boxed{H(z)} \to (-1)^n$

(a) $$H(z) = \frac{A(1+4z^{-2})(1+\frac{7}{9}z^{-1})}{1-\frac{1}{9}z^{-2}} \quad (1) \Rightarrow H(-1) = \frac{A \cdot 5 \cdot \frac{2}{9}}{\frac{8}{9}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 4/5} \quad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $$\boxed{H(z) = \frac{4}{5}\,\frac{(1+4z^{-2})(1+\frac{7}{9}z^{-1})}{1-\frac{1}{9}z^{-2}}} \quad (3) \Rightarrow$$

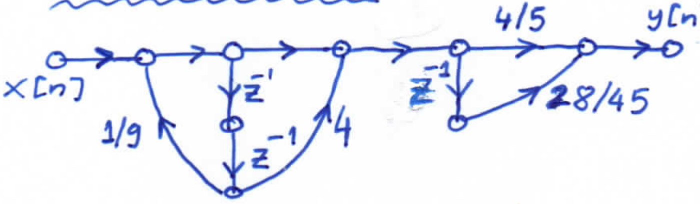
$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{\frac{4}{5} + \frac{28}{45}z^{-1} + \frac{16}{5}z^{-2} + \frac{112}{45}z^{-3}}{1-\frac{1}{9}z^{-2}}} \quad (4)$$

(b) Επίσης, $$H(z) = -\frac{144}{5} - \frac{112}{5}z^{-1} + \frac{\frac{148}{5} + \frac{1036}{45}z^{-1}}{1-\frac{1}{9}z^{-2}} \Rightarrow$$

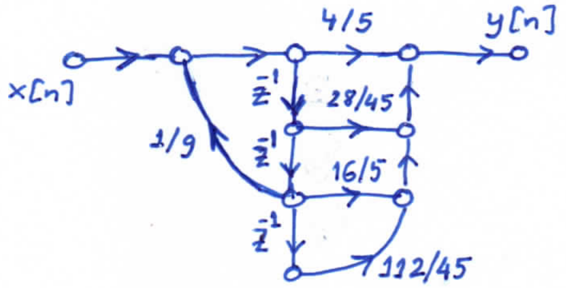
$$\Rightarrow \boxed{H(z) = -\frac{144}{5} - \frac{112}{5}z^{-1} + \frac{148/3}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{296/15}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}} \quad (5)$$

ΥΛΟΠΟΙΗΣΕΙΣ:

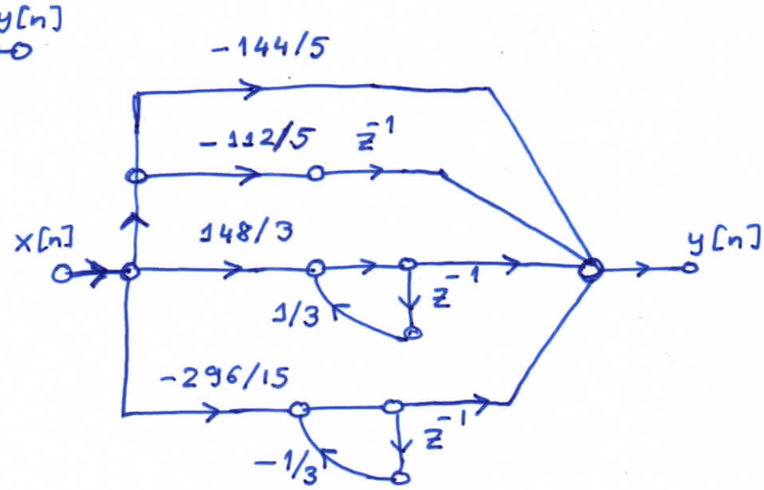
ΕΝ ΣΕΙΡΑ (από 3)



DIRECT FORM II (από 4)



ΕΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩ (από 5)



ⓒ Από ③, έχουμε (πολ/ζοντας & διαιρώντας με το $(1+\frac{1}{4}z^{-2})$):

$$H(z)=\frac{4}{5}\,\underbrace{\frac{1+\frac{7}{9}z^{-1}}{(1-\frac{1}{9}z^{-2})(1+\frac{1}{4}z^{-2})}}_{H_{min}(z)}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1+4z^{-2}\right)}_{H_{LIN}(z)}$$

- Ο πρώτος όρος είναι min phase, γιατί:

  ΠΟΛΟΙ $= \{\pm 1/3,\ \pm 1/2\, j\}$ → (εντός μοναδιαίου κύκλου)

  ΜΗΔΕΝΙΚΑ $= \{-7/9,\ 0, 0, 0\}$ ↗

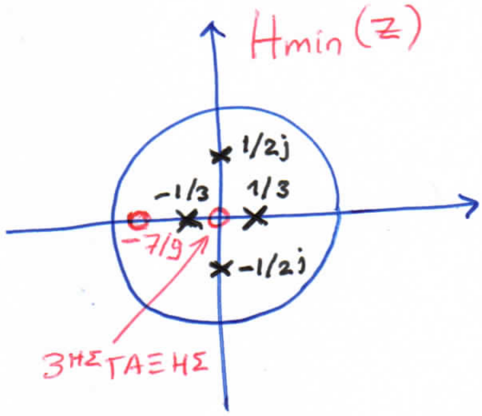
- Ο δεύτερος όρος είναι γραμμικής φάσης FIR, αφού

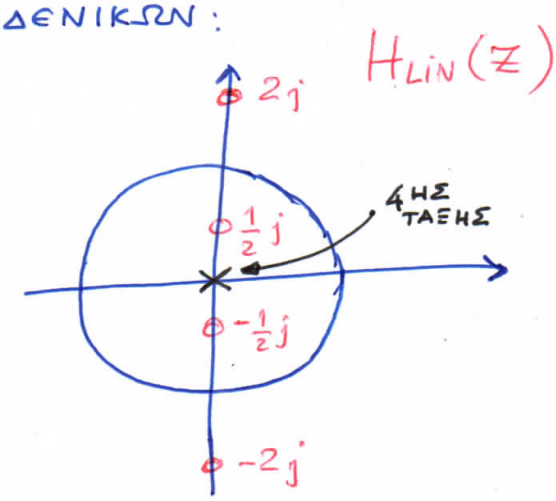
  $$H_{LIN}(z)=1+\left(\frac{1}{4}+4\right)z^{-2}+z^{-4}=1+\frac{17}{4}z^{-2}+z^{-4}$$

  δηλαδή έχει συμμετρική $h[n]$ ως προς το 2 $[M=4]$ (τύπου I).

  Τα ΜΗΔΕΝΙΚΑ $= \{\pm 1/2\, j,\ \pm 2j\}$, 4πλός πόλος στο 0.

- ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΠΟΛΩΝ + ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ:





ΑΣΚΗΣΗ 7

Σχεδίαση bandpass BUTTERWORTH, $N=1$

$\omega_{c_1}=\frac{\pi}{4}$, $\omega_{c_2}=\frac{3\pi}{4}$, BILINEAR TRANSFORM

- Θα ακολουθήσουμε την προτεινόμενη μεθοδολογία, σχεδιάζοντας πρώτα ένα κατωπερατό φίλτρο, και, στη συνέχεια, μετατρέποντάς το σε ζωνοπερατό χρησιμοποιώντας Μ/Σ του πίνακα 7.1.

- Επιλέγουμε $\theta_p=\frac{\pi}{2}$ (συχνότητα 3dB αποκοπής) του κατωπερατού φίλτρου για ευκολία στις πράξεις. Πράγματι, από τον τύπο του διγραμμικού Μ/Σ έχουμε $\Omega_c = 2\tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$

και από τον τύπο φίλτρων Butterworth, με $N=1$:

$$H_c(s)=\frac{\Omega_c}{s+\Omega_c}=\frac{2}{s+2} \xRightarrow[\text{ΜΣ}]{\text{Διγραμμικός}} H(z)=\left.\frac{2}{s+2}\right|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\Rightarrow H_{LP}(Z)=\frac{2}{2\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}+2}=\frac{1+Z^{-1}}{2} \quad \left(\begin{array}{c}\text{κατωπερατό}\\ \text{φίλτρο}\end{array}\right)$$

- Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον 3ο Μ/Σ του πίνακα 7.1 του βιβλίου:

$$a=\frac{\cos[(\pi/4+3\pi/4)/2]}{\cos[(3\pi/4-\pi/4)/2]}=\frac{\cos(\pi/2)}{\cos(\pi/4)}=0$$

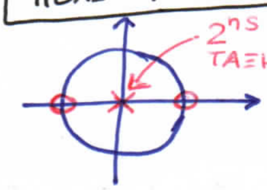
$$k=\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

, συνεπώς:

$$Z^{-1}=-z^{-2}$$

- Άρα: $$H_{BP}(z)=\left.H_{LP}(Z)\right|_{Z^{-1}=-z^{-2}}=\frac{1-z^{-2}}{2}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΠΟΛΩΝ/ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ



- Επαλήθευση: $\omega=0 \rightsquigarrow z=1 \rightsquigarrow H_{BP}(z)\big|_{z=1}=0$

  $\omega=\pi \rightsquigarrow z=-1 \rightsquigarrow H_{BP}(z)\big|_{z=-1}=0$

  $\omega=\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow z=j \rightsquigarrow H_{BP}(z)\big|_{z=j}=1$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Σχεδίαση κατωπερατού BUTTERWORTH, $N=2$, $\omega_c = 1/\sqrt{2}$ με impulse invariance

- Το φίλτρο BUTTERWORTH, τάξης 2, έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H_c(s) = \frac{\Omega_c^2}{(s-s_0)(s-s_1)}, \quad \text{με } s_0 = \Omega_c e^{j\pi\frac{3}{4}}, \quad s_1 = \Omega_c e^{j\pi\frac{5}{4}} = \Omega_c e^{-j\pi\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow H_c(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 - (s_0+s_1)s + s_0 s_1} = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + s\sqrt{2}\,\Omega_c + \Omega_c^2}$$

- Λόγω της μεθοδολογίας σχεδιασμού (impulse invariance):

$\Omega_c = \omega_c = 1/\sqrt{2}$, συνεπώς: $H_c(s) = \dfrac{\frac{1}{2}}{s^2 + s + \frac{1}{2}}$

- Στη συνέχεια, αναλύουμε σε μερικά κλάσματα:

$$H_c(s) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1+j}{2}\right)\left(s+\frac{1-j}{2}\right)} = \frac{j}{2}\left(\frac{1}{s+\frac{1+j}{2}} - \frac{1}{s+\frac{1-j}{2}}\right)$$

και προκύπτει η $H(z)$ με βάση το τυπολόγιο:

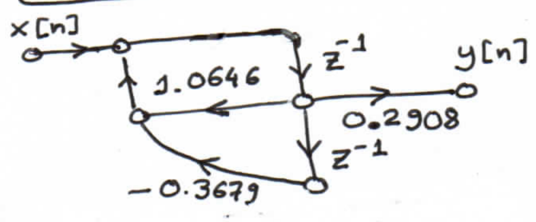
$$H(z) = \frac{j}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-\frac{1+j}{2}}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-\frac{1-j}{2}}z^{-1}}\right) =$$

$$= \frac{\frac{j}{2}\left(e^{-\frac{1+j}{2}} - e^{-\frac{1-j}{2}}\right)z^{-1}}{1-\left(e^{-\frac{1+j}{2}} + e^{-\frac{1-j}{2}}\right)z^{-1} + e^{-1}z^{-2}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}}\sin(1/2)\,z^{-1}}{1-2e^{-\frac{1}{2}}\cos(1/2)\,z^{-1} + e^{-1}z^{-2}} =$$

$$= \frac{0.2908\,z^{-1}}{1-1.0646\,z^{-1} + 0.3679\,z^{-2}}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ DIRECT FORM-II



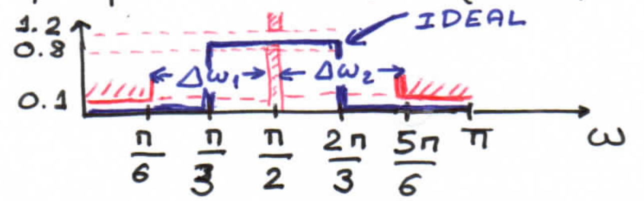
- ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ (υπάρχει ALIASING!)

$\omega = 0 \rightsquigarrow z=1 \rightsquigarrow H(z)\big|_{z=1} = 0.959$

$\omega = \pi \rightsquigarrow z=-1 \rightsquigarrow |H(z)|\big|_{z=-1} = 0.120$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Σχεδίαση ζωνοπερατού FIR Type I φίλτρου με μέθοδο παραθύρωσης



- Επειδή $\min\{0.2, 0.1\} = 0.1$, παίρνουμε $\delta = -20\log_{10} 10^{-1} = 20$ dB
- Αυτή η απαίτηση ικανοποιείται από όλα τα παράθυρα του Πίνακα 7.2 (4η στήλη), οπότε διαλέγουμε το ορθογώνιο (RECTANGULAR) παράθυρο, καθώς έχει το στενότερο κύριο λοβό (3η στήλη πίνακα), άρα θα οδηγήσει σε μικρότερο M (μήκος φίλτρου).
- Στην περίπτωσή μας έχουμε $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \pi/3$, κατά συνέπεια $\frac{4\pi}{M+1} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{M = 11}$. Επειδή ωστόσο το πρόβλημα ζητάει "Type I" φίλτρο, αυξάνουμε το M σε $\boxed{12}$.
- Χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.81) για πολυζωνικά φίλτρα, παίρνουμε ($G_1 = 0$, $G_2 = 1$, $G_3 = G_4 = 0$, $\omega_1 = (\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2})/2 = \frac{\pi}{3}$, $\omega_2 = (\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6})/2 = \frac{2\pi}{3}$, $\omega_3 = \pi$):

$$\boxed{h[n] = \frac{\sin\left[\frac{2\pi}{3}(n-6)\right] - \sin\left[\frac{\pi}{3}(n-6)\right]}{\pi(n-6)}, \quad 0 \leq n \leq 12 \; ; \; 0 \text{ αλλού.}}$$

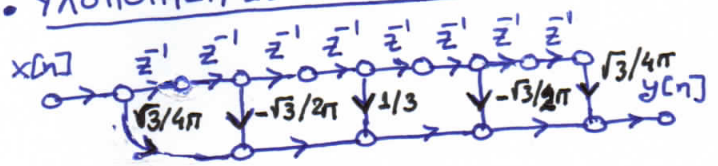
- Μετά από πράξεις, βρίσκοντας τις 13 τιμές του $h[n]$, έχουμε:

$$H(z) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} z^{-2} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} z^{-4} + \frac{1}{3} z^{-6} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} z^{-8} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} z^{-10} = z^{-2} H'(z), \text{ όπου}$$

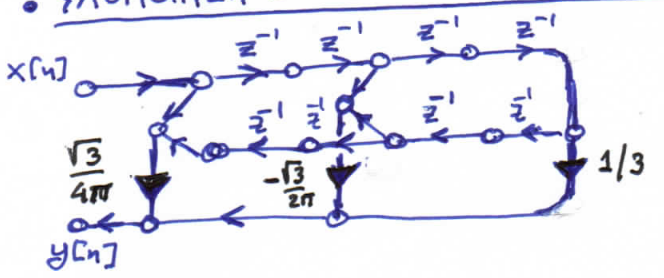
$$\boxed{H'(z) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} z^{-2} + \frac{1}{3} z^{-4} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} z^{-6} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} z^{-8}}$$

που είναι τύπου I FIR με το ίδιο μέτρο απόκρισης συχν. όπως το $H(z)$.

- ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ:



- ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΚΜΕΤΑΛΕΥΟΜΕΝΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ:

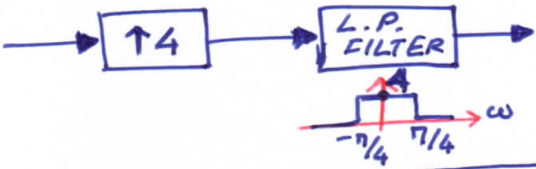


ΑΣΚΗΣΗ 10

FIR φίλτρο TYPE II ; LOWPASS; GAIN (4); CUTOFF $\frac{\pi}{4}$

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΘΥΡΟ ; $M=7$

- ουσιαστικά, το πρόβλημα ζητάει να σχεδιαστεί το φίλτρο του σχήματος, με δεδομένο παράθυρο (ορθογώνιο) και μήκος ($M=7$).



- Κατά συνέπεια, ($\omega_c = \frac{\pi}{4}$)

$$\boxed{h[n] = 4 \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{7}{2}\right)\right]}{\pi\left(n-\frac{7}{2}\right)} \; ; \quad 0 \le n \le 7}$$

- Κάνοντας πράξεις, έχουμε:

$$H(z) = \frac{8\sin\frac{7\pi}{8}}{7\pi} + \frac{8\sin\frac{5\pi}{8}}{5\pi} z^{-1} + \frac{8\sin\frac{3\pi}{8}}{3\pi} z^{-2} + \frac{8\sin\frac{\pi}{8}}{\pi} z^{-3} + \frac{8\sin\frac{\pi}{8}}{\pi} z^{-4} + \frac{8\sin\frac{3\pi}{8}}{3\pi} z^{-5} + \frac{8\sin\frac{5\pi}{8}}{5\pi} z^{-6} + \frac{8\sin\frac{7\pi}{8}}{7\pi} z^{-7} \Rightarrow$$

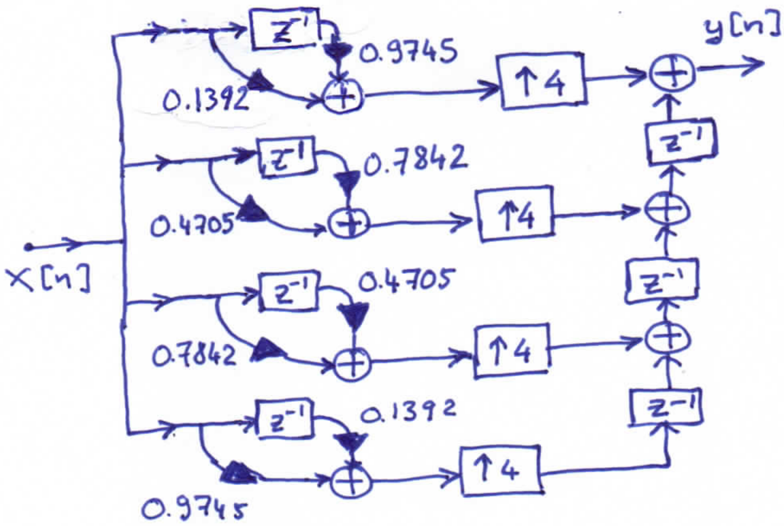
$$\Rightarrow \boxed{H(z) = 0.1392 + 0.4705 z^{-1} + 0.7842 z^{-2} + 0.9745 z^{-3} + 0.9745 z^{-4} + 0.7842 z^{-5} + 0.4705 z^{-6} + 0.1392 z^{-7}}$$

- Η πολυφασική αποσύνδεση του παραπάνω σε 4 τμήματα (εξ. (4.107)) είναι:

$$e_0[n] = 0.1392\,\delta[n] + 0.9745\,\delta[n-1]$$
$$e_1[n] = 0.4705\,\delta[n] + 0.7842\,\delta[n-1]$$
$$e_2[n] = 0.7842\,\delta[n] + 0.4705\,\delta[n-1]$$
$$e_3[n] = 0.9745\,\delta[n] + 0.1392\,\delta[n-1]$$

(ισχύει δηλ.: $H(z) = \sum_{k=0}^{3} E_k(z^4) z^{-k}$)

- Κατά συνέπεια, η πολυφασική υλοποίηση του INTERPOLATOR (×4), είναι (Σχ. 4.43):



(το πλεονέκτημα της υλοποίησης είναι ότι η επεξεργασία γίνεται στον χαμηλό ρυθμό της x[n], πριν δηλ. την αύξηση του ρυθμού ×4).