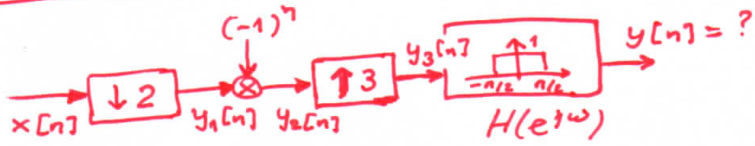
Π.Θ. THMMY

HY342 - DSP
REPEAT EXAM - SOLUTIONS

2015-16 /09/16

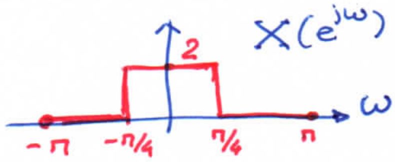
1



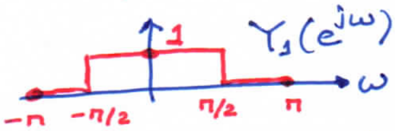
$x[n] = \frac{2\sin(\pi n/4)}{\pi n}$

• Δουλεύουμε στο πεδίο της συχνότητας:

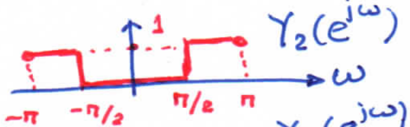
$$x[n] = \frac{2\sin(\pi n/4)}{\pi n} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2, & |\omega| \le \pi/4 \\ 0, & \frac{\pi}{4} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$



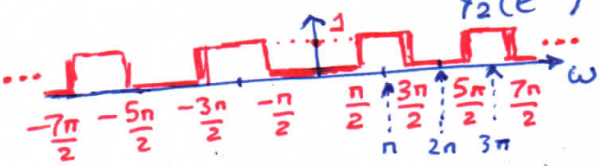
• $\boxed{\downarrow 2}$: $Y_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left\{ X(e^{j\omega/2}) + X(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)}) \right\}$



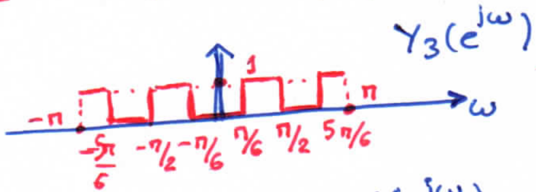
• $\otimes(-1)^n$: $y_2[n] = y_1[n] \underbrace{e^{j\pi n}}_{=(-1)^n} \Rightarrow Y_2(e^{j\omega}) = Y_1(e^{j(\omega-\pi)})$



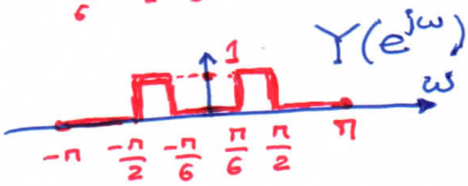
περισσότερες περίοδοι για επόμενο βήμα



• $\boxed{\uparrow 3}$: $Y_3(e^{j\omega}) = Y_2(e^{3j\omega})$



• $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\, Y_3(e^{j\omega})$

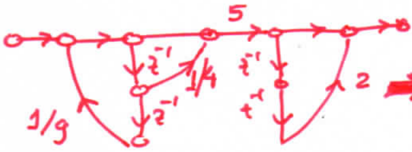


• Εύκολα βλέπουμε ότι το φάσμα είναι η διαφορά δύο παλμών (από το ±π/2 & από το ±π/6)

άρα:

$$\boxed{y[n] = \frac{\sin(\frac{\pi n}{2}) - \sin(\frac{\pi n}{6})}{\pi n}}$$

2 A



$\Rightarrow H(z) = \underbrace{H_{MIN}(z)\,H_{LIN}(z)}_{\text{ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ}}$

- Εύκολα, από το διάγραμμα υλοποίησης έχουμε:

$$H(z) = \frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{9}z^{-2}} \cdot 5 \cdot (1+2z^{-2})$$

- Μολονότι το 1ο κομμάτι είναι min phase, το δεύτερο δεν είναι lin phase. Κάτι τέτοιο είναι εφικτό να γίνει μετά από πολ/σμό & διαίρεση με τον όρο $(1+\frac{1}{2}z^{-2})$. Κατά συνέπεια:

$$H(z) = \underbrace{5 \cdot \frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{9}z^{-2})(1+\frac{1}{2}z^{-2})}}_{\text{MIN PHASE}} \cdot \underbrace{(1+\tfrac{1}{2}z^{-2})(1+2z^{-2})}_{\text{LIN PHASE: } \tau(\omega)=2}$$

MIN PHASE:

ΠΑΡΟΝ: $1+\frac{7}{18}z^{-2}-\frac{1}{18}z^{-4}$

ΠΟΛΟΙ: $\{\pm\frac{1}{3}, \pm 1/\sqrt{2}\}$

ΜΗΔ: $\{-\frac{1}{4}, 0, 0, 0\}$

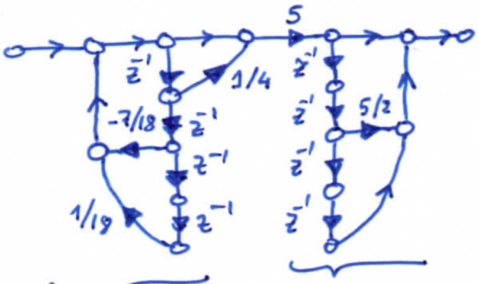
LIN PHASE: $\tau(\omega)=2$

$1+\frac{5}{2}z^{-2}+z^{-4}$

ΠΟΛΟΙ: $\{0,0,0,0\}$

ΜΗΔΕΝ: $\{\pm\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}\}$

- Ζητούμενο διάγραμμα υλοποίησης:



2 B $H(z)=(1+z^{-1})^3(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1}) \Rightarrow \tau(\omega)=?$

$$H(z) = \underbrace{(1+z^{-1})}_{H_1(z)}{}^3 \underbrace{(1-\tfrac{5}{2}z^{-1}+z^{-2})}_{H_2(z)} = H_1^3(z)\,H_2(z) \Rightarrow$$

$\hookrightarrow \tau_1(\omega) = \frac{1}{2}$ (1) $\qquad \hookrightarrow \tau_2(\omega) = 1$ (2)

$\Rightarrow \tau(\omega) = 3\tau_1(\omega) + \tau_2(\omega)$

$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \boxed{\tau(\omega) = \frac{5}{2}}$

3 A

$$H_c(s)=\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2}$$ IMPULSE INVARIANCE $T=2$ $\Rightarrow H(z)=?$

- Ακολουθούμε τα βήματα της μεθοδολογίας της αμετάβλητης κρουστικής απόκρ.:

$$H_c(s)=\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2}\xrightarrow[\mathcal{L}(\cdot)]{\text{αντίστροφος}} h_c(t)=te^{-\frac{t}{2}}u(t)\xrightarrow[\text{IMPULSE INVARIANCE}]{T=2} h[n]=4ne^{-n}u[n]\Rightarrow$$

$(h[n]=Th_c[nT])$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}}\boxed{H(z)=\frac{(4e^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-1}z^{-1})^2}}$$

3 B

H.P. BUTTERWORTH, $N=3,\ \omega_c=\pi/2$, ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΣ Μ/Σ $\Rightarrow H(z)=?$

- Βρίσκουμε πρώτα το $H_c(s)$ [L.P.]. Ρίζες: $s_k=\Omega_c\exp(j\pi\frac{2k+4}{6})$

Διαλέγουμε: $\Omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}},\ -\Omega_c,\ \Omega_c e^{j\frac{4\pi}{3}}$

- Άρα: $$H_c(s)=\frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+\Omega_c s+\Omega_c^2)}\quad [1]$$ $\Omega_c \to -2\mathrm{Re}\{\Omega_c e^{-j2\pi/3}\}$

- Λόγω διγραμμικού μ/σ:

$$\Omega_c=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)\underset{T=1,\ \omega_c=\pi/2}{=}2\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\quad [2]$$

- Από [1], [2] $\Rightarrow$ $$H_c(s)=\frac{8}{(s+2)(s^2+2s+4)}=\frac{8}{s^3+4s^2+8s+8}\Rightarrow$$

$$\underset{s=2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}{\Longrightarrow} H_{LP}(z)=\frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1\right)\left(\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+1\right)}=$$

$$=\frac{(1+z^{-1})^3}{2\left((1-z^{-1})^2+(1-z^{-1})(1+z^{-1})+(1+z^{-1})^2\right)}\Rightarrow H_{LP}(z)=\frac{(1+z^{-1})^3}{2(3+z^{-2})}$$

- Από το τυπολόγιο $H_{HP}(z)=H_{LP}(Z)\big|_{Z^{-1}=-z^{-1}}$ γιατί $$\alpha=-\frac{\cos[(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})/2]}{\cos[(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})/2]}=0$$

$$Z^{-1}=-\frac{z^{-1}+\cancel{\alpha}^{\,0}}{1+\cancel{\alpha}_{0}z^{-1}}=-z^{-1}$$

- Άρα $$\boxed{H_{HP}(z)=\frac{(1-z^{-1})^3}{2(3+z^{-2})}}$$

4 A $\quad (\delta[n]-\delta[n-12])\ \text{(24)}\ \big((u[n]-u[n-24])\cdot(\cos\frac{\pi n}{3}+\sin\frac{\pi n}{12})\big) = ?$

- $x[n]=\delta[n]-\delta[n-12] \xRightarrow{DFT_{24}} X[k]=DFT_{24}\{x[n]\} = 1-e^{-j\frac{2\pi}{24}\cdot 12k} = 1-(-1)^k$ [1] $\quad k=0,1,\dots,23$

- $y[n]=\cos\frac{\pi n}{3}+\sin\frac{\pi n}{12} = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}4n}+e^{-j\frac{2\pi}{24}4n}\right)+\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}n}-e^{-j\frac{2\pi}{24}n}\right)$ $\quad 0\le n\le 23$ $\quad 0\le n\le 23$

$$\xRightarrow{DFT_{24}} Y[k]=DFT_{24}\{y[n]\} = 12\delta[k-4]+12\delta[k-20] + 12j\,\delta[k-1]-12j\,\delta[k-23] \quad [2]$$

$0\le k\le 23$

- Από [1],[2] $\Rightarrow X[k]Y[k] = 24j\,\delta[k-1]-24j\,\delta[k-23] \Rightarrow$

(γιατί $X[4]=X[20]=0$
$X[1]=X[23]=2$)

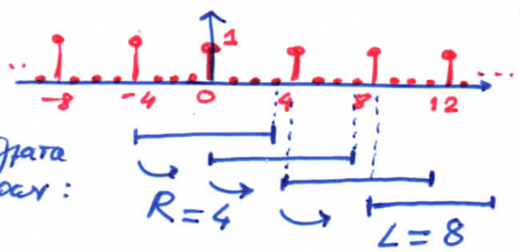
$\Rightarrow IDFT_{24}\{X[k]Y[k]\} = 2\sin\frac{\pi n}{12}$, $0\le n\le 23$ ή ισοδύναμα:

$$\boxed{2\,(u[n]-u[n-24])\sin\frac{\pi n}{12}} \leftarrow \text{ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ}$$

4 B $\quad x[n]=\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty}\delta[n-4\ell]$

$|X_r[k]| = ?\quad R=4, L=8, N=16$

• $x[n]$:



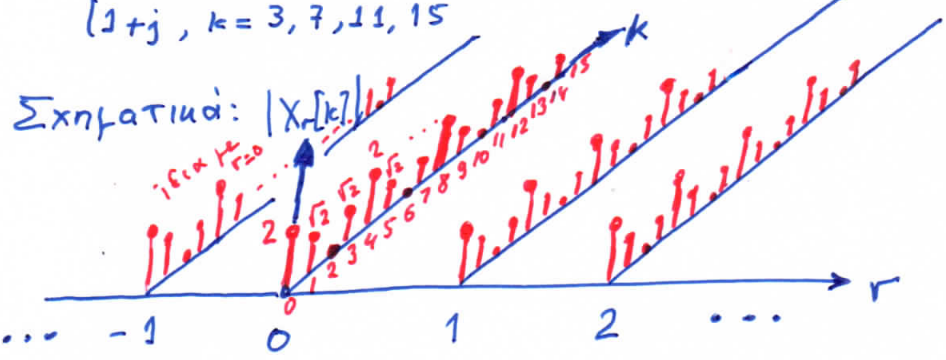
• Παραδείγματα παραθύρων:

- Σε κάθε παράθυρο έχουμε τον ίδιο υπολογισμό να κάνουμε:

$$DFT_{16}\{\delta[n]+\delta[n+4]\} = 1+e^{-j\frac{2\pi}{16}4k} = 1+e^{-j\frac{\pi k}{2}} = 1+(-j)^k =$$

$$= \begin{cases} 2, & k=0,4,8,12 \\ 1-j, & k=1,5,9,13 \\ 0, & k=2,6,10,14 \\ 1+j, & k=3,7,11,15 \end{cases} \Rightarrow |DFT_{16}\{\delta[n]+\delta[n+4]\}| = \begin{cases} 2, & k=0,4,8,12 \\ \sqrt{2}, & k=1,3,5,7,9,11,13,15 \\ 0, & k=2,6,10,14 \end{cases}$$

- Σχηματικά: $|X_r[k]|$



(ίδιο διάγραμμα για όλα τα r)