 2ο Σύνολο Ασκήσεων Παραδοτέο: 05-02-2015

Οι ασκήσεις, **γραπτές ή τυπωμένες**, παραδίδονται στην **έναρξη** του διαγωνίσματος της Πέμπτης, 05/02, στις **08:00**. Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι **ατομικές**.

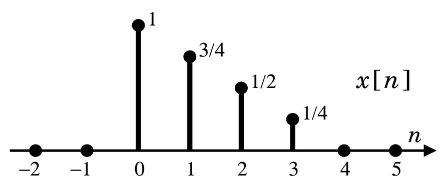
Άσκηση 1: Υπολογίστε τον DFT, $X[k]$ για $0 \le k \le N-1$, του σήματος:

$$x[n] = \begin{cases} 1\,, & \text{για} \quad 0 \le n \le (N/2)-1 \\ 0\,, & \text{για} \quad N/2 \le n \le N-1 \end{cases} \,,$$

με N άρτιο. Απλοποιείστε την έκφραση που λαμβάνετε για $k=0$, k άρτιο, και k περιττό.

Άσκηση 2: Θεωρήστε την πεπερασμένη ακολουθία $x[n]$ του παρακάτω σχήματος. Έστω επίσης $X[k]$ ο DFT τεσσάρων σημείων ($N = 4$) της ακολουθίας αυτής. Σχεδιάστε την ακολουθία $y[n]$, της οποίας ο DFT ισούται με

$$Y[k] = e^{-j\,3\,\pi\,k\,/\,2}\,X[k] \;, \quad k = 0\,,1\,,2\,,3 \;.$$



Άσκηση 3: Υπολογίστε τον DFT μήκους $N = 24$ των δύο πεπερασμένων ακολουθιών $x[n] = \delta[n-8]$ και $x[n] = \sin(\pi\,n/3)$, για $0 \le n \le 23$.

Άσκηση 4: Δίνονται οι ακολουθίες τεσσάρων δειγμάτων:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi\,n}{2}\right) \,, \quad h[n] = 2^{\,n} \,, \quad \text{για} \quad n = 0, 1, 2, 3 \,.$$

Υπολογίστε πρώτα τους DFT των $x[n]$ και $h[n]$, $X[k]$ και $H[k]$, για $N = 4$. Στη συνέχεια υπολογίστε την *γραμμική* και την *κυκλική* συνέλιξη των $x[n]$ και $y[n]$, και συγκρίνετε τις μεταξύ τους, όπως και με την ακολουθία που προκύπτει από τον αντίστροφο DFT του γινομένου $X[k]\,H[k]$ $(N = 4)$.

Άσκηση 5: Υπολογίστε την *κυκλική* συνέλιξη των ακολουθιών:

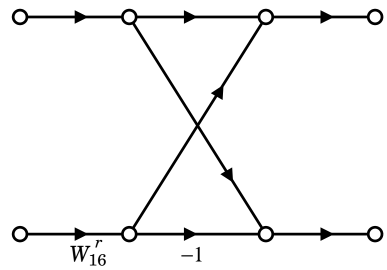
$$x[n] = 6\,\delta[n] + 5\,\delta[n-1] + 4\,\delta[n-2] + 3\,\delta[n-3] + 2\,\delta[n-4] + \delta[n-5]$$

και

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-4] \;,$$

για $N = 6$ και για $N = 10$.

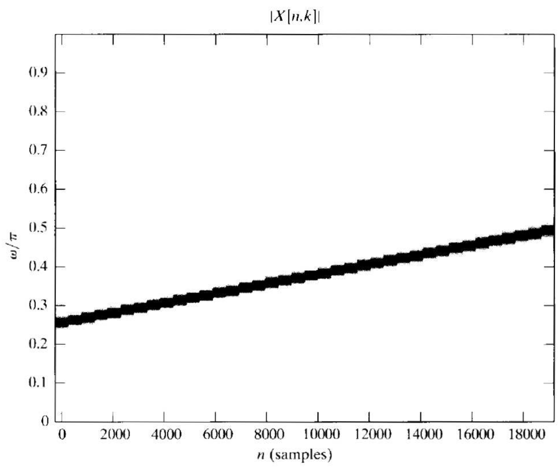
Άσκηση 6: Το διάγραμμα ροής πεταλούδας (butterfly) του παρακάτω σχήματος αποτελεί τμήμα της υλοποίησης του αλγορίθμου FFT με αποδεκατισμό στον χρόνο (decimation in time), για μήκος μετασχηματισμού $N = 16$. Πόσα είναι τα στάδια/βήματα του διαγράμματος υλοποίησης του FFT, και ποιες είναι οι πιθανές τιμές του r για κάθε ένα από τα στάδια/βήματα αυτά; Σε ποια στάδια υπάρχουν πεταλούδες με τιμή $r = 2$;



Άσκηση 7: Βρείτε προσεγγιστικά τις παραμέτρους ω_0 και λ του σήματος

$$x[n] \;=\; \sin\left(\omega_0\, n \;+\; \frac{1}{2}\,\lambda\, n^2\right)$$

(chirp signal) από το φασματόγραμμά του (spectrogram), που έχει σχεδιαστεί στο παρακάτω σχήμα (σκούρες περιοχές υποδηλώνουν μεγάλες τιμές του μέτρου του DFT).



Άσκηση 8: Θέλουμε να εκτιμήσουμε το φάσμα του σήματος διακριτού χρόνου

$$x[n] = \cos(\pi\, n/4) \,+\, \cos(17\pi\, n/64) \;\;,$$

χρησιμοποιώντας ένα ορθογώνιο παράθυρο $w[n]$ με μήκος 64, και διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) μήκους επίσης 64. Εξηγήστε εάν αναμένετε να διακρίνονται δύο διαχωρίσιμες κορυφές που αντιστοιχούν στις συχνότητες των δύο συνημιτόνων, ή όχι.

Άσκηση 9: Δίνεται το σήμα:

$$x[n] = \begin{cases} \cos(\pi\, n/6)\ , & 0 \le n \le 35 \\ \cos(\pi\, n/2)\ , & 36 \le n \le 71 \\ 0\ , & \text{αλλού} \end{cases}$$

του οποίου θέλουμε να εκτιμήσουμε το φασματόγραμμα. Υπολογίστε (και σχεδιάσετε σε $3-\mathrm{D}$) τα δείγματα

$$X[rR, k] = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR+m]\, w[m]\, e^{-j\,(2\,\pi/N)\,k\,m}\,,$$

για $-\infty < r < \infty$ και $0 \le k \le N-1$, όπου το $w[n]$ είναι ένα ορθογώνιο παράθυρο μήκους $L = 36$, ο DFT έχει μήκος $N = 36$, και η δειγματοληψία στο χρόνο γίνεται επίσης με $R = 36$.