Παν. Θεσσαλίας, ΤΗΜΜΥ ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ Ακαδ. Έτος 2013-14
Ημερομηνία: 05-02-2014 **Λύσεις 2ου Συνόλου Ασκήσεων**

Άσκηση 1:

Υπολογίστε τον DFT, $X[k]$ για $0 \leq k \leq N-1$, του σήματος:

$$x[n] \;=\; \begin{cases} 1\,, & \text{για} \quad 0 \leq n \leq (N/2)-1 \\ 0\,, & \text{για} \quad N/2 \leq n \leq N-1 \end{cases} ,$$

με N άρτιο. Απλοποιείστε την έκφραση που λαμβάνετε για $k=0$, k άρτιο, και k περιττό.

Λύση: Έχουμε:

$$X[k] \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn} \;=\; \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^{kn} \;=\; \frac{1 \,-\, e^{-j\pi k}}{1 \,-\, e^{-j2\pi k/N}} \;=\; \frac{1 \,-\, (-1)^k}{1 \,-\, e^{-j2\pi k/N}} \;,$$

για $0 \leq k \leq N-1$. Παρατηρούμε ότι για όλα τα $k \neq 0$ στο παραπάνω διάστημα ο παρανομαστής είναι μη μηδενικός, οπότε και η τιμή της παραπάνω έκφρασης βρίσκεται εύκολα, αφού η τιμή του αριθμητή ισούται με 0 ή 2 (βλέπε παρακάτω). Ωστόσο, για $k=0$, και ο αριθμητής και ο παρανομαστής μηδενίζονται. Για να βρούμε το ζητούμενο στην τιμή αυτή χρησιμοποιούμε τον κανόνα του De L'Hospital, και παραγωγίζοντας αριθμητή και παρανομαστή ως προς k, παίρνουμε ως απάντηση για $k=0$ την τιμή $j\pi/(j\,2\pi/N) \;=\; N/2$. Συνοψίζοντας λοιπόν, έχουμε για $0 \leq k \leq N-1$:

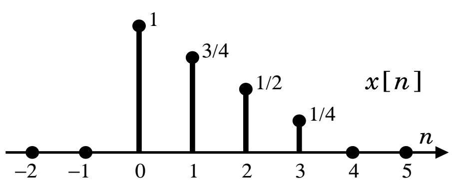
$$X[k] \;=\; \begin{cases} N/2\,, & k \;=\; 0 \\ 0\,, & k \text{ άρτιο } \neq\; 0 \\ \dfrac{2}{1 \,-\, e^{-j2\pi k/N}}\,, & k \text{ περιττό} \end{cases} .$$

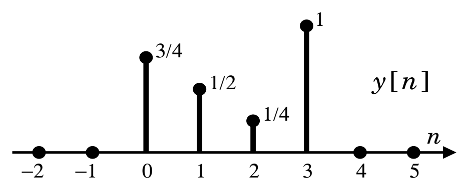
Άσκηση 2:

Θεωρήστε την πεπερασμένη ακολουθία $x[n]$ του παρακάτω σχήματος (αριστερά). Έστω επίσης $X[k]$ ο DFT τεσσάρων σημείων ($N=4$) της ακολουθίας αυτής. Σχεδιάστε την ακολουθία $y[n]$, της οποίας ο DFT ισούται με

$$Y[k] \;=\; e^{-j3\pi k/2} X[k] \;, \quad k = 0\,,1\,,2\,,3 \;.$$

Λύση: Παρατηρούμε εύκολα πως $Y[k] \;=\; e^{-j3\pi k/2} X[k] \;=\; e^{-j6\pi k/4} X[k] \;=\; W_4^{3k} X[k]$, για $k = 0\,,1\,,2\,,3$, κατά συνέπεια $y[n] \;=\; x[<n-3>_4]$ (βλέπε παρακάτω σχήμα, δεξιά).





Άσκηση 3:

Υπολογίστε τον DFT μήκους $N = 24$ των δύο πεπερασμένων ακολουθιών $x[n] = \delta[n-8]$ και $x[n] = \sin(\pi n/3)$, για $0 \le n \le 23$.

Λύση: Για την πρώτη ακολουθία γνωρίζουμε ότι $\mathcal{DFT}\{\delta[n]\} = 1$, για $0 \le k \le 23$, συνεπώς από την ιδιότητα μετάθεσης στον χρόνο έχουμε:

$$\mathcal{DFT}\{\delta[n-8]\} = W_{24}^{8k} = e^{-j2\pi 8k/24} = e^{-j2\pi k/3} = (-1/2)^k (1 + \sqrt{3}j)^k ,$$

για $0 \le k \le 23$.
Για τη δεύτερη ακολουθία έχουμε:

$$x[n] = \sin(\pi n/3) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\pi n/3} - e^{-j\pi n/3}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}4n} - e^{-j\frac{2\pi}{24}4n}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{DFT}\{x[n]\} = \frac{24}{2j}\left(\delta[<k-4>_{24}] - \delta[<k+4>_{24}]\right) = -12j\delta[k-4] + 12j\delta[k-20] ,$$

για $0 \le k \le 23$.

Άσκηση 4:

Δίνονται οι ακολουθίες τεσσάρων δειγμάτων:

$$x[n] \;=\; \cos\left(\frac{\pi\, n}{2}\right)\;,\quad h[n] \;=\; 2^{\,n}\;,\quad \text{για}\quad n = 0,1,2,3\;.$$

Υπολογίστε πρώτα τους DFT των $x[n]$ και $h[n]$, $X[k]$ και $H[k]$, για $N = 4$. Στη συνέχεια υπολογίστε την *γραμμική* και την *κυκλική* συνέλιξη των $x[n]$ και $y[n]$, και συγκρίνετε τις μεταξύ τους, όπως και με την ακολουθία που προκύπτει από τον αντίστροφο DFT του γινομένου $X[k]\,H[k]$ $(N = 4)$.

Λύση: Υπολογίζουμε πρώτα τον DFT του $x[n]$. Έχουμε:

$$X[k] \;= \sum_{n=0}^{3} \cos(\pi\, n/2)\, W_4^{kn}\;,\;\; 0 \,\leq\, k \,\leq\, 3\;\;.$$

Επειδή το συνημίτονο συνεισφέρει μόνο δύο μη μηδενικές τιμές στα παραπάνω αθροίσματα (είναι μονάδα για $n = 0$ και -1 για $n = 2$), παίρνουμε:

$$X[k] \;=\; 1 \,-\, W_4^{2k}\;,\;\; 0 \,\leq\, k \,\leq\, 3\;\;.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον DFT του $h[n]$. Έχουμε:

$$H[k] \;= \sum_{n=0}^{3} 2^{\,n}\, W_4^{kn} \;=\; 1 \,+\, 2\,W_4^{k} \,+\, 4\,W_4^{2k} \,+\, 8\,W_4^{3k}\;,\;\; 0 \,\leq\, k \,\leq\, 3\;\;.$$

Μπορούμε να βρούμε την κυκλική συνέλιξη ως τον αντίστροφο DFT του γινομένου $X[k]\,H[k]$ (για $N = 4$). Πράγματι:

$$\begin{aligned} X[k]\,H[k] \;&=\; (1 \,-\, W_4^{2k})\,(1 \,+\, 2\,W_4^{k} \,+\, 4\,W_4^{2k} \,+\, 8\,W_4^{3k}) \\ &=\; 1 \,+\, 2\,W_4^{k} \,+\, 4\,W_4^{2k} \,+\, 8\,W_4^{3k} \,-\, W_4^{2k} \,-\, 2\,W_4^{3k} \,-\, 4\,W_4^{4k} \,-\, 8\,W_4^{5k} \\ &=\; -3 \,-\, 6\,W_4^{k} \,+\, 3\,W_4^{2k} \,+\, 6\,W_4^{3k}\;\;,\qquad 0 \,\leq\, k \,\leq\, 3\;\;, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι $W_4^{4k} = 1$ και $W_4^{5k} = W_4^{k}$. Κατά συνέπεια, η κυκλική συνέλιξη δίνεται από:

$$\mathcal{IDFT}\{X[k]\,H[k]\} = \,-3\,\delta[n] \,-\, 6\,\delta[n-1] \,+\, 3\,\delta[n-2] \,+\, 6\,\delta[n-3]\;\;,$$

ορισμένη φυσικά για $0 \,\leq\, n \,\leq\, 3\,.$
Παρατηρούμε πως η κυκλική συνέλιξη μπορεί να υπολογιστεί και από την γραμμική συνέλιξη των δύο ακολουθιών, που εύκολα μπορεί να βρεθεί ότι ισούται με

$$x[n] * y[n] \;=\; \delta[n] \,+\, 2\,\delta[n-1] \,+\, 3\,\delta[n-2] \,+\, 6\,\delta[n-3] \,-\, 4\,\delta[n-4] \,-\, 8\,\delta[n-5]\;\;,$$

αν πάρουμε υπόψη μας το φαινόμενο της χρονικής αναδίπλωσης στα σημεία $4 \,\rightarrow\, 0$ και $5 \,\rightarrow\, 1\,.$

Άσκηση 5:

Υπολογίστε την *κυκλική* συνέλιξη των ακολουθιών:

$$x[n] \;=\; 6\,\delta[n] \;+\; 5\,\delta[n-1] \;+\; 4\,\delta[n-2] \;+\; 3\,\delta[n-3] \;+\; 2\,\delta[n-4] \;+\; \delta[n-5]$$

και

$$h[n] \;=\; \delta[n] \;+\; \delta[n-4] \;\;,$$

για $N = 6$ και για $N = 10$.

Λύση: Ο πιο εύκολος τρόπος για την επίλυση του προβλήματος είναι μέσω του υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης των δύο ακολουθιών. Αυτή βρίσκεται εύκολα ως:

$$x[n]*h[n] \;=\; x[n]+x[n-4] \;=$$

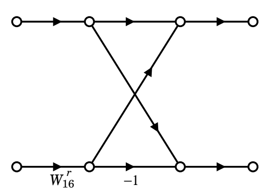
$$6\delta[n]+5\delta[n-1]+4\delta[n-2]+3\delta[n-3]+8\delta[n-4]+6\delta[n-5]+4\delta[n-6]+3\delta[n-7]+2\delta[n-8]+\delta[n-9].$$

Η ακολουθία αυτή, όπως αναμενόταν, έχει μήκος 10, και κατά συνέπεια συμπίπτει με την κυκλική συνέλιξη των $x[n]$ και $h[n]$ για $N = 10$. Αντιθέτως, η κυκλική συνέλιξή τους διαφέρει για $N = 6$, καθόσον τα δείγματα στις τιμές $6 \leq n \leq 9$ αναδιπλώνονται (αθροίζονται) στις τιμές $0 \leq n \leq 3$. Κατά συνέπεια, η ζητούμενη κυκλική συνέλιξη για $N = 6$ ισούται με

$$10\,\delta[n] \;+\; 8\,\delta[n-1] \;+\; 6\,\delta[n-2] \;+\; 4\,\delta[n-3] \;+\; 8\,\delta[n-4] \;+\; 6\,\delta[n-5] \;\;.$$

Άσκηση 6:

Το διάγραμμα ροής πεταλούδας (butterfly) του παρακάτω σχήματος αποτελεί τμήμα της υλοποίησης του αλγορίθμου FFT με αποδεκατισμό στον χρόνο (decimation in time), για μήκος μετασχηματισμού $N = 16$. Πόσα είναι τα στάδια/βήματα του διαγράμματος υλοποίησης του FFT, και ποιες είναι οι πιθανές τιμές του r για κάθε ένα από τα στάδια/βήματα αυτά; Σε ποια στάδια υπάρχουν πεταλούδες με τιμή $r = 2$;



Λύση: Με βάση τον αλγόριθμο υλοποίησης FFT αποδεκατισμού στον χρόνο, είναι εύκολο να δούμε πως στο:

- Πρώτο στάδιο, έχουμε $r = 0$.
- Δεύτερο στάδιο, έχουμε $r = 0, 4$.
- Τρίτο στάδιο, έχουμε $r = 0, 2, 4, 6$.
- Τέταρτο στάδιο, έχουμε $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

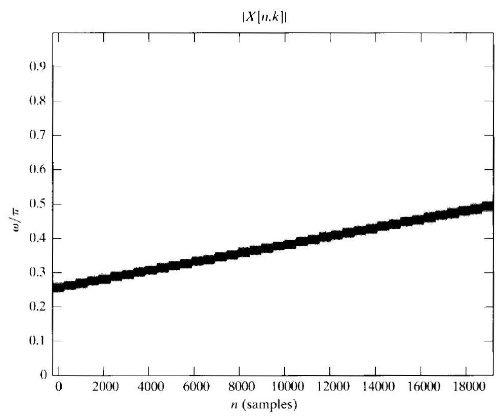
(Αυτό αποτελεί μία γενίκευση του σχ. 4.2 του βιβλίου του Μουστακίδη για ένα ακόμη στάδιο). Κατά συνέπεια, η πεταλούδα του σχήματος με τιμή $r = 2$ συναντιέται μόνο στο τρίτο και τέταρτο στάδιο του αλγορίθμου υλοποίησης του FFT με αποδεκατισμό στον χρόνο.

Άσκηση 7:

Βρείτε προσεγγιστικά τις παραμέτρους ω_0 και λ του σήματος

$$x[n] \;=\; \sin\left(\omega_0\, n \;+\; \frac{1}{2}\,\lambda\, n^2\right)$$

(chirp signal) από το φασματόγραμμά του (spectrogram), που έχει σχεδιαστεί στο παρακάτω σχήμα (σκούρες περιοχές υποδηλώνουν μεγάλες τιμές του μέτρου του DFT).



Λύση: Η στιγμιαία συχνότητα του παραπάνω σήματος chirp ισούται με $\omega_i[n] \;=\; \omega_0 \,+\, \lambda\, n$, κατά συνέπεια περιμένουμε να δούμε προσεγγιστικά μία ευθεία γραμμή στο φασματόγραμμα του σήματος, που περνάει από το ω_0 για $n = 0$ και έχει κλίση λ (το ακριβές φασματόγραμμα φυσικά θα εξαρτάται από τις παραμέτρους $R\,, L\,, N$ (βλέπε επίσης Άσκηση 9)). Κατά συνέπεια, προσεγγιστικά μπορούμε να πούμε βλέποντας το σχήμα ότι $\omega_0 \;=\; 0.25\,\pi$ rad και $\lambda \;=\; (0.5\,\pi - 0.25\,\pi)/(19000 \,-\, 0) \;=\; 1.3\,\pi \,\times\, 10^{-5} \;=\; 4.1 \,\times\, 10^{-5}$ rad .

Άσκηση 8:

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το φάσμα του σήματος διακριτού χρόνου

$$x[n] = \cos\left(\pi\, n/4\right) \,+\, \cos\left(17\pi\, n/64\right) \;\;,$$

χρησιμοποιώντας ένα ορθογώνιο παράθυρο $w[n]$ με μήκος 64, και διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) μήκους επίσης 64. Εξηγήστε εάν αναμένετε να διακρίνονται δύο διαχωρίσιμες κορυφές που αντιστοιχούν στις συχνότητες των δύο συνημιτόνων, ή όχι.

Λύση: Οι συχνότητες των δύο συνημίτονων διαφέρουν κατά

$$\Delta\,\omega \;=\; \left|\, \frac{\pi}{4} \;-\; \frac{17\,\pi}{64} \,\right| \;=\; \frac{\pi}{64} \;\;.$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά αυτή είναι κατά πολύ μικρότερη από το πλάτος του κύριου λοβού του ορθογώνιου παραθύρου $\Delta\,\omega_w \;=\; 4\,\pi/64$ (βλέπε πίνακα 3.1 του βιβλίου του Μουστακίδη με $L = 64$). Κατά συνέπεια, δεν αναμένουμε να δούμε δύο διαχωρίσιμες κορυφές.

Άσκηση 9:

Δίνεται το σήμα:

$$x[n] = \begin{cases} \cos(\pi\, n/6)\ , & 0 \le n \le 35 \\ \cos(\pi\, n/2)\ , & 36 \le n \le 71 \\ 0\ , & \text{αλλού} \end{cases}$$

του οποίου θέλουμε να εκτιμήσουμε το φασματόγραμμα. Υπολογίστε (και σχεδιάσετε σε $3-\mathrm{D}$) τα δείγματα

$$X[rR,k] = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR+m]\, w[m]\, e^{-j\,(2\,\pi/N)\,k\,m}\,,$$

για $-\infty < r < \infty$ και $0 \le k \le N-1$, όπου το $w[n]$ είναι ένα ορθογώνιο παράθυρο μήκους $L = 36$, ο DFT έχει μήκος $N = 36$, και η δειγματοληψία στο χρόνο γίνεται επίσης με $R = 36$.

Λύση: Από τον ορισμό του $X[rR,k]$ και το γεγονός ότι το σήμα είναι μηδενικό για $n < 0$ και $n > 71$, είναι προφανές ότι τα ζητούμενα δείγματα είναι μηδενικά για $r < 0$ και $r > 1$.
Για $r = 0$ μόνο το πρώτο συνημίτονο συνεισφέρει στο ζητούμενο άθροισμα, και το ζητούμενο είναι ο DFT 36 σημείων του

$$\cos(\pi\, n/6) \;=\; \frac{1}{2}\,(e^{j\,\frac{2\pi}{36}\,3\,n} \;+\; e^{-j\,\frac{2\pi}{36}\,3\,n})$$

Από τις ιδιότητες του DFT (δυικότητα, μετατόπιση στον χρόνο), παίρνουμε:

$$X[0,k] \;=\; \frac{36}{2}\,\delta[<k-3>_{36}] \;+\; \frac{36}{2}\,\delta[<k+3>_{36}] \;=\; 18\,\delta[k-3] \;+\; 18\,\delta[k-33]\ .$$

Παρόμοια, για $r = 1$, μόνο το δεύτερο συνημίτονο συνεισφέρει στο άθροισμα, οπότε παίρνουμε:

$$X[36,k] \;=\; \frac{36}{2}\,\delta[<k-9>_{36}] \;+\; \frac{36}{2}\,\delta[<k+9>_{36}] \;=\; 18\,\delta[k-9] \;+\; 18\,\delta[k-27]\ .$$

Η τρισδιάστατη αναπαράσταση του παραπάνω φασματογράμματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.