Λύσεις 1ου Συνόλου Ασκήσεων

Άσκηση 1:

Στο σήμα συνεχούς χρόνου $x_c(t) = \sin(10\pi t) + \cos(20\pi t)$ έχει γίνει δειγματοληψία με περίοδο T και, ως αποτέλεσμα, έχει προκύψει το σήμα διακριτού χρόνου

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) .$$

Βρείτε την περίοδο δειγματοληψίας. Είναι μοναδική; Αν όχι, εντοπίστε και δεύτερη κατάλληλη περίοδο T, συμβατή με τα παραπάνω. Θα υπάρχει φαινόμενο αναδίπλωσης (aliasing) κατά την ανακατασκευή του σήματος συνεχούς χρόνου από το σήμα διακριτού χρόνου;

Λύση: Μετά από δειγματοληψία με περίοδο T λαμβάνει χώρα η αντικατάσταση $t \longrightarrow nT$, και κατά συνέπεια έχουμε:

$$x_c(t) \longrightarrow x[n] = \sin(10\pi nT) + \cos(20\pi nT) .$$

Παρατηρούμε ότι μία επιλογή περιόδου που κάνει το σήμα αυτό να ισούται με το δεδομένο στην εκφώνηση της άσκησης είναι αυτή που ικανοποιεί:

$$10\pi nT = \pi n/5 \Rightarrow T = 1/50 ,$$

και

$$20\pi nT = 2\pi n/5 \Rightarrow T = 1/50 .$$

Οι επιλογές αυτές είναι συμβατές, άρα η απάντηση είναι $T = 1/50 = 0.02$. Παρατηρούμε ότι η επιλογή αυτής της περιόδου ικανοποιεί το θεώρημα της δειγματοληψίας του Shannon, καθόσον το Niquist rate ισούται με 20 Hz, άρα $T_{\max} = 1/20 = 2.5/50$, και συνεπώς $T \leq T_{\max}$. Δεν υπάρχει δηλαδή φαινόμενο αναδίπλωσης.
Παρατηρούμε ωστόσο ότι η παραπάνω επιλογή δεν είναι μοναδική. Πράγματι, λόγω περιοδικότητας των συναρτήσεων $\sin(\bullet)$ και $\cos(\bullet)$, έχουμε άπειρες δυνατές λύσεις, μία εκ των οποίων είναι αυτή που ικανοποιεί τις:

$$10\pi nT = \pi n/5 + 2\pi n \Rightarrow 10\pi nT = \frac{11\pi n}{5} \Rightarrow T = 11/50 ,$$

και

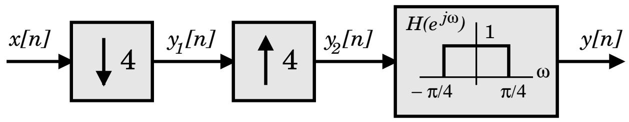
$$20\pi nT = 2\pi n/5 + 4\pi n \Rightarrow 20\pi nT = \frac{22\pi n}{5} \Rightarrow T = 11/50 ,$$

άρα η επιλογή αυτή είναι συμβατή μεταξύ των δύο εξισώσεων και συνεπώς $T = 11/50 = 0.22$ αποτελεί μία δυνατή περίοδο δειγματοληψίας που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος. Φυσικά όμως δεν ικανοποιεί το θεώρημα της δειγματοληψίας του Shannon, καθόσον $T > T_{\max}$, και κατά συνέπεια υπάρχει φαινόμενο αναδίπλωσης.

Άσκηση 2:

Ποια είναι η έξοδος $y[n]$ του συστήματος του σχήματος σε είσοδο

$$x[n] = \left[\frac{\sin(\pi\, n/8)}{\pi n}\right]^2 \quad ;$$



Λύση: Αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα αυτό στο πεδίο της συχνότητας. Έχουμε λοιπόν για το σήμα εισόδου:

$$x[n] = \frac{\sin(\pi\, n/8)}{\pi n} \cdot \frac{\sin(\pi\, n/8)}{\pi n} \;\Rightarrow\; X(e^{j\,\omega}) \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\,\Pi(e^{j\,\omega}) * \Pi(e^{j\,\omega})\;,$$

όπου

$$\Pi(e^{j\,\omega}) \;=\; \begin{cases} 1\;,\; |\omega| \le \pi/8 \\ 0\;,\; \pi/8 < |\omega| \le \pi \end{cases} .$$

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς πως η συνέλιξη των δύο ιδίων παλμών είναι ένα σήμα με τριγωνικό φάσμα εκτεινόμενο στο διάστημα $[-\pi/4\,,\,\pi/4]$, με μηδενική τιμή στα $\pm\,\pi/4$ και μέγιστη τιμή στο $\omega = 0$, ίση με $\pi/4$. Φυσικά η τιμή αυτή πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το $1/2\,\pi$, οπότε λαμβάνουμε μέγιστη τιμή φάσματος του σήματος εισόδου ίση με $1/8$.
Στη συνέχεια το σήμα περνάει από έναν downsampler, κατά συνέπεια το φάσμα βρίσκεται με άθροιση τεσσάρων όρων,

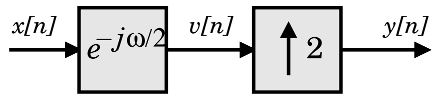
$$Y_1(e^{j\,\omega}) \;=\frac{1}{4}\left[\,X(e^{j\,\frac{\omega}{4}}) \;+\; X(e^{j\,(\frac{\omega}{4}-\frac{2\,\pi}{4})}) \;+\; X(e^{j\,(\frac{\omega}{4}-\frac{4\,\pi}{4})}) \;+\; X(e^{j\,(\frac{\omega}{4}-\frac{6\,\pi}{4})})\,\right].$$

Καθόσον ωστόσο το σήμα εισόδου είναι ζωνοπεριορισμένο μεταξύ $[-\pi/4\,,\,\pi/4]$, μόνο ο πρώτος όρος του αθροίσματος θα δώσει φάσμα μεταξύ των $[-\pi\,,\,\pi]$. Η έξοδος κατά συνέπεια θα είναι πάλι ένα τριγωνικό σήμα που θα καλύπτει ωστόσο τώρα (λόγω κλιμάκωσης) όλο το διάστημα $[-\pi\,,\,\pi]$, με μηδενική τιμή στα $\pm\,\pi$ και μέγιστη τιμή $1/4\,.\,1/8 \;=\; 1/32$ στο $\omega = 0$.
Στη συνέχεια το σήμα περνάει από έναν upsampler, οπότε το φάσμα εξόδου προκύπτει με μία κλιμάκωση του φάσματος εισόδου, $Y_2(e^{j\,\omega}) \;=\; Y_1(e^{j\,\omega/4})$. Αυτό συνεπάγεται ένα φάσμα εξόδου με μορφή «πριονιού», δηλαδή με μηδενικές τιμές στα $\pm\,\pi/4$ και $\pm\,3\,\pi/4$ και μέγιστη τιμή $1/32$ στα $\omega = 0\,,\,\pm\,\pi/2\,,\,\pm\,\pi$.
Τέλος το σήμα φιλτράρεται με το συγκεκριμένο ιδανικό κατωπερατό φίλτρο $H(e^{j\,\omega})$ της εκφώνησης, κατά συνέπεια από αυτό παραμένει μόνο το τριγωνικό φάσμα στο $[-\pi/4\,,\,\pi/4]$ με μέγιστη τιμή στο $\omega = 0$ ίση με $1/32$.
Δηλαδή το σήμα εξόδου έχει το ίδιο φάσμα με το σήμα εισόδου με την εξαίρεση μίας πολλαπλασιαστικής σταθεράς $(1/32)/(1/8) \;=\; 1/4$. Κατά συνέπεια, το σήμα εξόδου είναι το $1/4$ του αρχικού σήματος εξόδου, δηλαδή:

$$y[n] = \frac{1}{4}\;\left[\frac{\sin(\pi\, n/8)}{\pi n}\right]^2\;.$$

Άσκηση 3:

Στο σύστημα του σχήματος, η είσοδος είναι η $x[n] = \delta[n]$. Σχεδιάστε το πλάτος και την φάση του $Y(e^{j\omega})$ της εξόδου (για $|\omega| < \pi$).



Λύση: Λύνουμε το πρόβλημα στο πεδίο της συχνότητας. Συμβολίζουμε με $v[n]$ την έξοδο του πρώτου υποσυστήματος (όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα), και έχουμε:

$$x[n] = \delta[n] \;\; \Rightarrow \;\; X(e^{j\omega}) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; V(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2} \,,$$

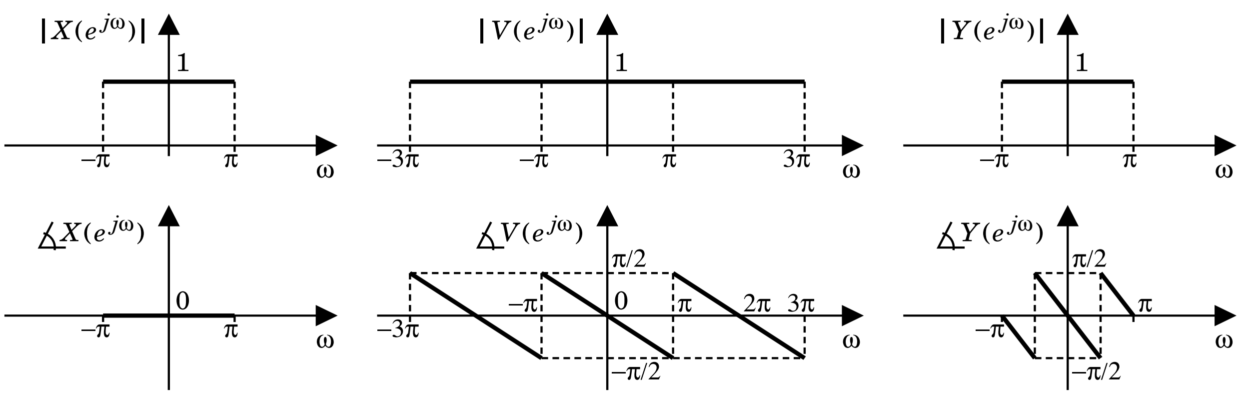
για $-\pi < \omega \leq \pi$, όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο DTFT του $\delta[n]$ είναι μονάδα. Το φάσμα (πλάτος και φάση) του $V(e^{j\omega})$ έχει σχεδιαστεί στο παρακάτω σχήμα για τρεις περιόδους, για να βοηθηθεί η σχεδίαση του $Y(e^{j\omega})$. Στην συνέχεια, με βάση το ότι $Y(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega 2})$, λόγω της υπερδειγματοληψίας κατά 2, παίρνουμε:

$$Y(e^{j\omega}) \;=\; \begin{cases} e^{-j\omega - j\pi} \;, & -\pi < \omega < -\pi/2 \\ e^{-j\omega} \;, & |\omega| \leq \pi/2 \\ e^{-j\omega + j\pi} \;, & \pi/2 < \omega \leq \pi \end{cases} \;.$$

Κατά συνέπεια, $|\,Y(e^{j\omega})\,| \;=\; 1$ για $-\pi < \omega \leq \pi$ και

$$\arg\{\,Y(e^{j\omega})\,\} \;=\; \begin{cases} -\omega \;-\; \pi \;, & -\pi < \omega < -\pi/2 \\ -\omega \;, & |\omega| \leq \pi/2 \\ -\omega \;+\; \pi \;, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases} \;,$$

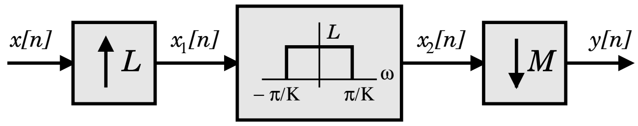
τα οποία και σχεδιάζονται στο παρακάτω σχήμα για μία περίοδο $(\,-\pi\,,\pi\,]$.



Άσκηση 4:

Δίνεται το παρακάτω σύστημα αλλαγής ρυθμού δειγματοληψίας κατά ρητό M/L, με χρήση κατάλληλου κατωπερατού φίλτρου κέρδους L και συχνότητας αποκοπής $\omega_c = \pi/K$, όπου $K = \max\{L, M\}$. Ποια είναι η έξοδος $y[n]$ του συστήματος, εάν $L = 4$, $M = 3$, και

$$x[n] \;=\; \frac{\sin(2\,\pi\, n/3)}{\pi\, n} \;\; ;$$



Λύση: Λύνουμε το πρόβλημα στο πεδίο της συχνότητας. Το σήμα εισόδου έχει φασματικό περιεχόμενο σε μορφή μοναδιαίου παλμού στο διάστημα $[-2\,\pi/3\,,\; 2\,\pi/3\,]$, δηλαδή

$$X(e^{j\,\omega}) \;=\; \begin{cases} 1\,, \; |\omega| \le 2\,\pi/3 \\ 0\,, \; 2\,\pi/3 < |\omega| \le \pi \end{cases} .$$

Μετά την πρώτη αλλαγή του ρυθμού της δειγματοληψίας, έχουμε (εντός του διαστήματος $[-\pi\;,\;\pi\,]$)

$$X_1(e^{j\,\omega}) \;=\; X(e^{j\,4\,\omega}) \;=\; \begin{cases} 1\,, \; |\omega| \le \pi/6 \\ 0\,, \; \pi/6 < |\omega| \le 2\,\pi/6 \\ 1\,, \; 2\,\pi/6 < |\omega| \le 4\,\pi/6 \\ 0\,, \; 4\,\pi/6 < |\omega| \le 5\,\pi/6 \\ 1\,, \; 5\,\pi/6 < |\omega| \le \pi \end{cases} ,$$

το οποίο μετά από το κατωπερατό φιλτράρισμα του σχήματος, καθώς «περνάει» μόνο συχνοτικό περιεχόμενο εντός του διαστήματος $[-\pi/4\,,\; \pi/4\,]$ (με κέρδος 4), μετατρέπεται στο φάσμα

$$X_2(e^{j\,\omega}) \;=\; \begin{cases} 4\,, \; |\omega| \le \pi/6 \\ 0\,, \; \pi/6 < |\omega| \le \pi \end{cases} .$$

Στη συνέχεια ακολουθεί η δεύτερη αλλαγή ρυθμού δειγματοληψίας, που λόγω του ότι δεν υπάρχει αναδίπλωση δίνει (εντός του διαστήματος $[-\pi\;,\;\pi\,]$)

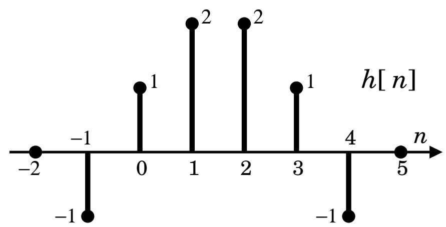
$$Y(e^{j\,\omega}) \;=\; \frac{1}{3}\,[\,X_2(e^{j\,\frac{\omega}{3}}) \,+\, X_2(e^{j\,(\frac{\omega}{3} - 2\,\frac{\pi}{3})}) \,+\, X_2(e^{j\,(\frac{\omega}{3} - 4\,\frac{\pi}{3})})\,] \;=\; \begin{cases} 4/3\,, \; |\omega| \le \pi/2 \\ 0\,, \quad \pi/2 < |\omega| \le \pi \end{cases} .$$

Κατά συνέπεια, παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου, έχουμε

$$y[n] \;=\; \frac{4}{3}\;\frac{\sin(\pi\, n/2)}{\pi\, n} \;\; .$$

Άσκηση 5:

Ποια είναι η καθυστέρηση ομάδας του γραμμικά χρονικά αναλλοίωτου συστήματος με κρουστική απόκριση που δίνεται στο παρακάτω σχήμα;



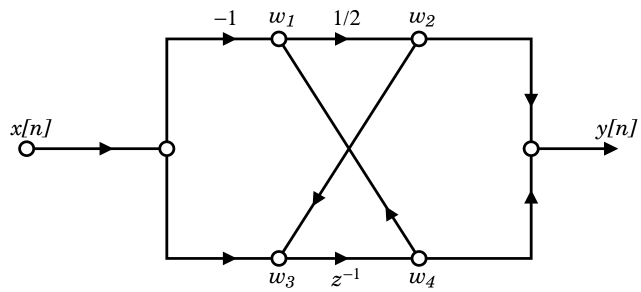
Λύση: Παρατηρούμε ότι η κρουστική απόκριση είναι συμμετρική γύρω ως προς το σημείο $3/2 = 1.5$, δηλαδή ισχύει $h[n] = h[3-n]$. Πρόκειται κατά συνέπεια για FIR σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης Τύπου II, και συνεπώς η καθυστέρηση ομάδας είναι $\tau = 3/2$. Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος:

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= -e^{j\omega} + 1 + 2e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} - e^{-j4\omega} \\
&= e^{-j3\omega/2}\left[(-e^{j5\omega/2} - e^{-j5\omega/2}) + (e^{j3\omega/2} + e^{-j3\omega/2}) + (2e^{j\omega/2} + 2e^{-j\omega/2})\right] \\
&= e^{-j3\omega/2}\left[-2\cos\left(\frac{5\omega}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) + 4\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Η ποσότητα εντός της αγκύλης είναι πραγματικός αριθμός, και κατά συνέπεια η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι $-3\omega/2$ ή $-3\omega/2 + \pi$. Παραγωγίζοντας ως προς ω, αγνοώντας τις ασυνέχειες, και αντιστρέφοντας το πρόσημο, παίρνουμε $\tau = 3/2$.

Άσκηση 6:

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται το διάγραμμα ενός γραμμικά χρονικά αναλλοίωτου συστήματος. Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(z)$, και σχεδιάστε το σε κανονική μορφή I και II. Σχεδιάστε επίσης το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του συστήματος, $|H(e^{j\omega})|$.



Λύση: Εισάγοντας τις βοηθητικές μεταβλητές του σχήματος, γράφουμε εξισώσεις για όλους τους κόμβους στο πεδίο του μετασχηματισμού Z, ως εξής:

$$\begin{aligned} W_1(z) &= -X(z) + W_4(z) \\ W_2(z) &= \frac{1}{2} W_1(z) \\ W_3(z) &= W_2(z) + X(z) \\ Y(z) &= W_2(z) + W_4(z) \end{aligned}$$

Από την πρώτη και δεύτερη εξίσωση παίρνουμε:

$$W_2(z) = \frac{1}{2}\,(W_4(z) - X(z))\,,$$

ενώ από την τρίτη και τέταρτη:

$$W_4(z) = z^{-1}\,(W_2(z) + X(z))\,.$$

Αντικαθιστώντας την μία στην άλλη παίρνουμε από αυτές τις δύο εξισώσεις αντίστοιχα:

$$W_2(z) = \frac{\frac{1}{2}\,(z^{-1} - 1)}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\,X(z)\,,$$

και:

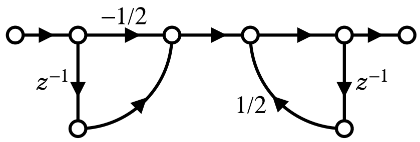
$$W_4(z) = \frac{z^{-1}\,(1 - \frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\,X(z) = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\,X(z)\,.$$

Αντικαθιστώντας τέλος στην πέμπτη εξίσωση από την πρώτη ομάδα, έχουμε:

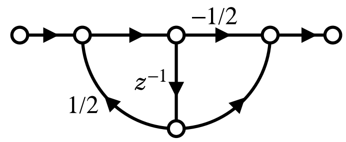
$$Y(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\,X(z) \;\Rightarrow\; H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\,.$$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για σύστημα all pass (ολοπερατό), άρα $|H(e^{j\omega})| = 1$.

Τέλος, στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η υλοποίηση του συστήματος στις ζητούμενες μορφές, δηλ. κανονική μορφή I και II, χρησιμοποιώντας signal flow graphs.



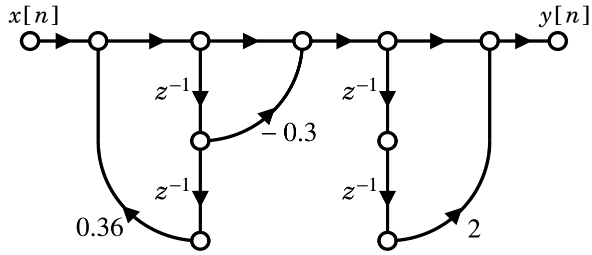
DIRECT FORM I



DIRECT FORM II

Άσκηση 7:

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το διάγραμμα υλοποίησης ενός αιτιατού, γραμμικού και χρονικά αναλλοίωτου συστήματος.



(a) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του, $H(z)$, και σχεδιάστε το διάγραμμα μηδενικών και πόλων του συστήματος.

(b) Σχεδιάστε το διάγραμμα υλοποίησής του σε κανονική μορφή (direct form) I και II.

(c) Εκφράστε τη συνάρτηση μεταφοράς ως γινόμενο συστήματος ελάχιστης φάσης (minimum phase), $H_{\min}(z)$, και ολοπερατού (all pass), $H_{\mathrm{ap}}(z)$, και σχεδιάστε τα διαγράμματα πόλων/μηδενικών τους.

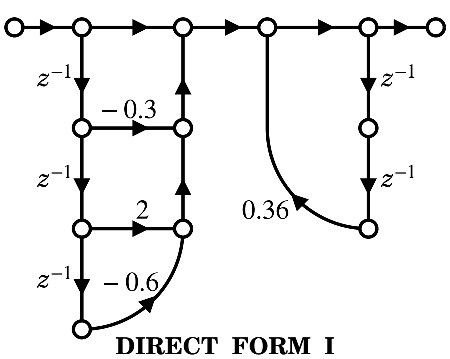
Λύση:

(a) Το διάγραμμα υλοποίησης αποτελεί εν σειρά (cascade) υλοποίηση ενός συστήματος υλοποιημένου σε κανονική μορφή II (direct form II) και ενός φίλτρου FIR, οπότε

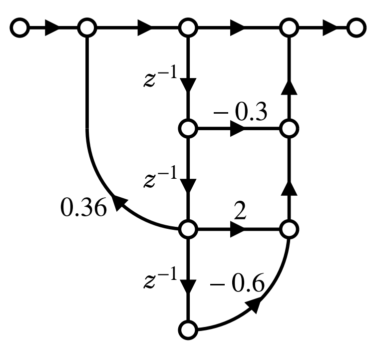
$$H(z) \;=\; \frac{1 \,-\, 0.3\,z^{-1}}{1 \,-\, 0.36\,z^{-2}}\,(\,1 \,+\, 2\,z^{-2}\,) \;=\; \frac{1 \,-\, 0.3\,z^{-1} \,+\, 2\,z^{-2} \,-\, 0.6\,z^{-3}}{1 \,-\, 0.36\,z^{-2}} \;.$$

Βλέπουμε εύκολα ότι το σύστημα έχει τρία μηδενικά στις θέσεις $\{\pm\sqrt{2}\,j\;,\;0.3\}$ και ισάριθμους πόλους στις θέσεις $\{\pm 0.6\;,\;0\}$. Το μηδέν αποτελεί πόλο καθώς ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή (ως προς το z^{-1}) είναι κατά ένας μεγαλύτερος αυτού του παρανομαστή. Το ζητούμενο διάγραμμα μηδενικών και πόλων του συστήματος δίνεται στο αριστερό σχήμα στο τέλος της λύσης της άσκησης (επόμενη σελίδα).

(b) Τα ζητούμενα διαγράμματα υλοποίησης δίνονται στο κάτωθι σχήμα, προκύπτοντας εύκολα από τη ρητή συνάρτηση μεταφοράς της $H(z)$ όπως έχει αναπτυχθεί παραπάνω.



DIRECT FORM I

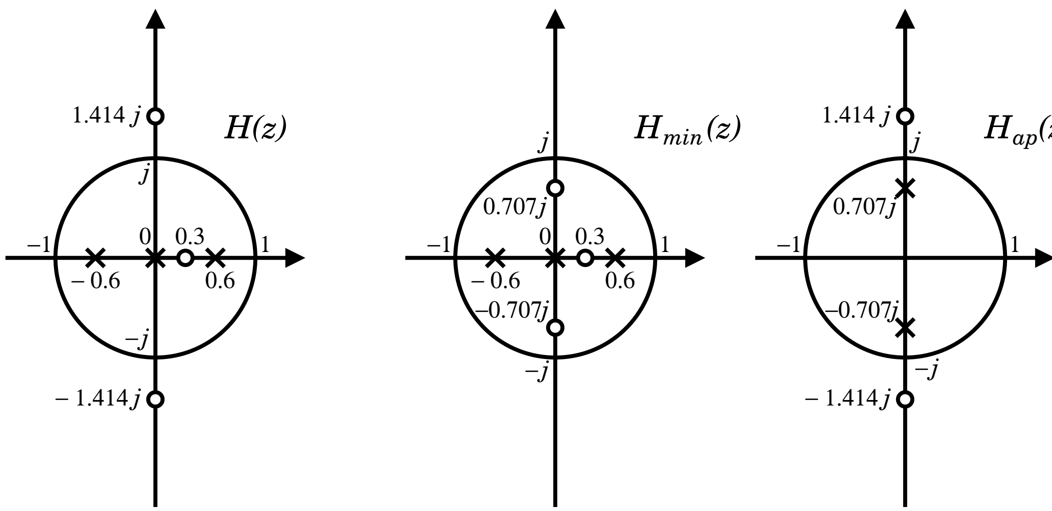


DIRECT FORM II

(c) Εισάγουμε μηδενικά και πόλους στις θέσεις $\pm 1/\sqrt{2}\, j \;\approx\; \pm 0.707\, j$, πολλαπλασιάζοντας δηλαδή και διαιρώντας την $H(z)$ με το πολυώνυμο $(\,1 \,+\, (1/2)\, z^{-2}\,)$, οπότε έχουμε

$$H(z) \;=\; \left[\; \frac{1 \,-\, 0.3\, z^{-1}}{1 \,-\, 0.36\, z^{-2}}\, (\,1 \,+\, 0.5\, z^{-2}\,) \right] \left[\; \frac{1 \,+\, 2\, z^{-2}}{1 \,+\, 0.5\, z^{-2}} \;\right] \;.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς εντός της αριστερής αγκύλης αντιστοιχεί στο ζητούμενο σύστημα ελάχιστης φάσης, $H_{\min}(z)$, καθώς έχει ως πόλους τους $\{\pm 0.6\,,\, 0\}$ και μηδενικά τα $\{\pm 1/\sqrt{2}\, j\,,\, 0.3\}$, που βρίσκονται όλα εντός του μοναδιαίου κύκλου. Επίσης, η συνάρτηση μεταφοράς εντός της δεξιάς αγκύλης αντιστοιχεί σε σύστημα all pass (λόγω της μορφής της) με πόλους $\{\pm 1/\sqrt{2}\, j\}$ και μηδενικά $\{\pm \sqrt{2}\, j\}$. Τα διαγράμματα πόλων και μηδενικών των δύο συστημάτων δίνονται στο μεσαίο και δεξιό σχήμα παρακάτω, μαζί με το διάγραμμα πόλων και μηδενικών του αρχικού συστήματος (αριστερό σχήμα).



Άσκηση 8:

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(z)$, του κατωπερατού (lowpass) φίλτρου Butterworth τάξης 1 με συχνότητα στην απόσβεση 3 dB ίση με $\omega_c = 0.2\,\pi$, χρησιμοποιώντας τον δι-γραμμικό μετασχηματισμό όπως επίσης και την μέθοδο αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης. Σε κάθε περίπτωση σχεδιάστε το διάγραμμα υλοποίησης των φίλτρων σε κανονική μορφή (direct form) II, όπως επίσης και το διάγραμμα μηδενικών και πόλων. Για βοήθεια στις πράξεις, δίνονται τα:

$$\tan(0.1\,\pi) = 0.325 \ , \quad \frac{\tan(0.1\,\pi)}{1 \,+\, \tan(0.1\,\pi)} = 0.245 \ , \quad \frac{1 \,-\, \tan(0.1\,\pi)}{1 \,+\, \tan(0.1\,\pi)} = 0.51 \ , \quad e^{\,-\,0.2\,\pi} = 0.53 \ .$$

Λύση: Με βάση τον τύπο των αναλογικών φίλτρων Butterworth (lowpass), καθόσον το φίλτρο είναι τάξης 1, έχουμε:

$$H(s) = \frac{\Omega_c}{s \,+\, \Omega_c} \ ,$$

όπου στη συχνότητα Ω_c το φίλτρο έχει απόσβεση 3 dB.
Επειδή το επιθυμητό φίλτρο είναι κατωπερατό, η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης θα μπορούσε θεωρητικά να χρησιμοποιηθεί. Παίρνοντας $T = 1$, έχουμε $\Omega_c = \omega_c = 0.2\,\pi$, κατά συνέπεια, εφαρμόζοντας τον τύπο από το τυπολόγιο, έχουμε:

$$H(s) = \frac{0.2\,\pi}{s \,+\, 0.2\,\pi} \quad \Rightarrow \quad H_{\mathrm{imp}}(z) = \frac{0.2\,\pi}{1 \,-\, e^{\,-\,0.2\,\pi}\, z^{\,-\,1}} = \frac{0.63}{1 \,-\, 0.53\, z^{\,-\,1}} \ .$$

Το διάγραμμα υλοποίησης του φίλτρου δίνεται στο σχήμα της επόμενης σελίδας (αριστερά). Ωστόσο, αν σχεδιάσουμε την απόκριση συχνότητάς του, θα διαπιστώσουμε ότι το φαινόμενο της αναδίπλωσης είναι πολύ ισχυρό, λόγω της μικρής τάξης του αναλογικού φίλτρου Butterworth που χρησιμοποιήσαμε. Για παράδειγμα, το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στο $\omega = 0$ είναι 1.35, ξεπερνώντας κατά πολύ την τιμή 1, ενώ στο $\omega = \pi$ παραμένει στην τιμή 0.41.
Εναλλακτικά, το φίλτρο μπορεί να σχεδιαστεί με την μέθοδο του δι-γραμμικού μετασχηματισμού. Έχουμε τότε:

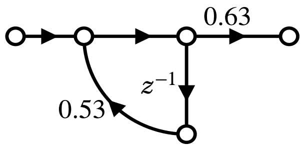
$$\Omega_c = 2\, \tan(0.1\,\pi) \ , \qquad s \,=\, 2\, \frac{1 \,-\, z^{\,-\,1}}{1 \,+\, z^{\,-\,1}} \ ,$$

οπότε, αντικαθιστώντας στην εξίσωση του αναλογικού φίλτρου, παίρνουμε:

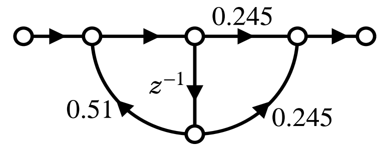
$$H_{\mathrm{bil}}(z) \,=\, \frac{2\, \tan(0.1\,\pi)}{2\, \dfrac{1 \,-\, z^{\,-\,1}}{1 \,+\, z^{\,-\,1}} \,+\, 2\, \tan(0.1\,\pi)} \,=\, \frac{\tan(0.1\,\pi) \,+\, \tan(0.1\,\pi)\, z^{\,-\,1}}{(\,1 \,+\, \tan(0.1\,\pi)\,) \,+\, (\,\tan(0.1\,\pi) \,-\, 1\,)\, z^{\,-\,1}}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan(0.1\,\pi)}{\tan(0.1\,\pi) \,+\, 1} \,+\, \dfrac{\tan(0.1\,\pi)}{\tan(0.1\,\pi) \,+\, 1}\, z^{\,-\,1}}{1 \,+\, \dfrac{\tan(0.1\,\pi) \,-\, 1}{\tan(0.1\,\pi) \,+\, 1}\, z^{\,-\,1}} \,=\, \frac{0.245 \,+\, 0.245\, z^{\,-\,1}}{1 \,-\, 0.51\, z^{\,-\,1}} \ .$$

Το διάγραμμα υλοποίησης του φίλτρου δίνεται στο επόμενο σχήμα (δεξιά). Αντίθετα με το προηγούμενο φίλτρο, το μέτρο της απόκρισης συχνότητάς του έχει τα επιθυμητά χαρακτηριστικά (ισούται με 1 στο $\omega = 0$ και με 0 στο $\omega = \pi$), αν και λόγω της χαμηλής τάξης του φίλτρου Butterworth που χρησιμοποιήσαμε, το μέτρο της απόκρισης συχνότητας στο stopband παραμένει σχετικά υψηλό (για παράδειγμα, στο $\omega = 0.5\pi$ είναι ίσο με 0.31).



$H_{\text{imp}}(z)$



$H_{\text{bil}}(z)$

Άσκηση 9:

Έστω ότι το φίλτρο διακριτού χρόνου δίνεται από την:

$$H(z) \;=\; \frac{6}{1 \,-\, e^{-0.3}\, z^{-1}} \;-\; \frac{3}{1 \,-\, e^{-0.6}\, z^{-1}} \;\;.$$

Το φίλτρο αυτό έχει σχεδιαστεί με την μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης (implulse invariance) με βάση ένα φίλτρο συνεχούς χρόνου, χρησιμοποιώντας τη σχέση $h[n] \,=\, 3\, h_c(3\, n)$ μεταξύ των κρουστικών αποκρίσεων του φίλτρου διακριτού και συνεχούς χρόνου. Βρείτε μία συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου συνεχούς χρόνου, $H_c(s)$, από την οποία μπορεί να προέκυψε το δοθέν φίλτρο διακριτού χρόνου.

Λύση: Γνωρίζουμε πως για την μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης ισχύει:

$$H_c(s) \;=\; \sum_k \frac{A_k}{s \,-\, s_k} \;\;\Rightarrow\;\; H(z) \;=\; \sum_k \frac{A_k\, T}{1 \,-\, e^{s_k T} z^{-1}} \;\;.$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι $h[n] \,=\, T\, h_c(T\, n)$. Από την εκφώνηση έχουμε $h[n] \,=\, 3\, h_c(3\, n)$, κατά συνέπεια $T = 3$. Από τα παραπάνω και την δοθείσα $H(z)$ έχουμε:

$$-\,0.3 \;=\; s_o\, T \;\;\Rightarrow\;\; s_o \;=\; -\,0.1 \;\;, \qquad A_o\, T \;=\; 6 \;\;\Rightarrow\;\; A_o \;=\; 2 \;\;,$$

$$-\,0.6 \;=\; s_1\, T \;\;\Rightarrow\;\; s_1 \;=\; -\,0.2 \;\;, \qquad A_1\, T \;=\; -\,3 \;\;\Rightarrow\;\; A_1 \;=\; -\,1 \;\;.$$

Κατά συνέπεια, το ζητούμενο αρχικό φίλτρο συνεχούς χρόνου είναι το:

$$H_c(s) \;=\; \frac{2}{s \,+\, 0.1} \;-\; \frac{1}{s \,+\, 0.2} \;\;.$$

Άσκηση 10:

Σχεδιάστε ένα *υψιπερατό* φίλτρο με κρουστική απόκριση πεπερασμένου μήκους (FIR highpass filter) που να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$|H(e^{j\omega})| < 2/\sqrt{10}\,, \quad \text{για} \quad 0 \le |\omega| \le 0.25\,\pi$$

και

$$1 \;-\; 1/\sqrt{10} < |H(e^{j\omega})| < 1 \;+\; 1/\sqrt{10}\,, \quad \text{για} \quad 0.75\,\pi \le |\omega| \le \pi \;\;,$$

χρησιμοποιώντας την μέθοδο της παραθύρωσης (χρησιμοποιώντας κάποιο κατάλληλο απλό παράθυρο). Βρείτε την κρουστική απόκριση του φίλτρου (χωρίς τον αριθμητικό υπολογισμό των $h[n]$) και σχεδιάστε το διάγραμμα υλοποίησής του. Παραλείψτε το τελικό στάδιο ελέγχου της ικανοποίησης των προδιαγραφών από το σχεδιασμένο φίλτρο.

Λύση: Παρατηρούμε ότι το μικρότερο δ στις παραπάνω προδιαγραφές είναι το

$$\delta \;=\; 1/\sqrt{10} \;\;\Rightarrow\;\; 20\,\log_{10}\delta \;=\; 20\,\log_{10} 10^{-1/2} \;=\; -10\;\text{dB} \;\;,$$

το οποίο υπερκαλύπτεται από το ορθογώνιο παράθυρο (peak approximation error of side lobes), αλλά φυσικά και από τα άλλα απλά παράθυρα που έχουμε δει στο μάθημα (Hamming, Hanning, κ.τ.λ.). Επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε το ορθογώνιο παράθυρο όμως, λόγω του απλούστερου μαθηματικού του τύπου αλλά και του στενότερου κύριου λοβού του σε σχέση με τα άλλα παράθυρα (που θα δώσει κατά συνέπεια μικρότερο μήκος φίλτρου).
Στη συνέχεια, βρίσκουμε το M,

$$\Delta\,\omega \;=\; 0.75\,\pi \;-\; 0.25\,\pi \;=\; 0.5\,\pi \;=\; 4\,\pi/(M+1) \;\;\Rightarrow\;\; M \;=\; 7 \;\;.$$

Τέτοια τιμή όμως μας δημιουργεί FIR φίλτρο τύπου II, που όπως ξέρουμε έχει μηδενικό στην υψηλή συχνότητα π. Προφανώς κάτι τέτοιο δεν είναι αποδεκτό για υψιπερατό φίλτρο, και κατά συνέπεια επιλέγουμε το αμέσως επόμενο, $M = 8$.
Έχουμε επίσης ότι η συχνότητα αποκοπής είναι $\omega_c \;=\; (0.75\,\pi \;+\; 0.25\,\pi)/2 \;=\; 0.5\,\pi$.
Τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} h[n] \;&=\; \left[\, \frac{\sin\left(\,\pi\,(n-4)\,\right)}{\pi\,(n-4)} \;-\; \frac{\sin\left(\,\omega_c\,(n-4)\,\right)}{\pi\,(n-4)} \right] \, w_8^{\text{rect}}[n] \\ &=\; \frac{\sin\left(\,\pi\,(n-4)\,\right)}{\pi\,(n-4)} \;-\; \frac{\sin\left(\,(\pi/2)\,(n-4)\,\right)}{\pi\,(n-4)} \\ &=\; \delta[\,n-4\,] \;-\; \frac{\sin\left(\,(\pi/2)\,(n-4)\,\right)}{\pi\,(n-4)} \;\;,\quad \text{για} \quad n \;=\; 0\,,1\,,2\,,...,8 \;\;. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τις παραπάνω 9 τιμές της κρουστικής απόκρισης και παίρνουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του σχεδιασμένου φίλτρου

$$H(z) \;=\; \frac{1}{3\,\pi}\,z^{-1} \;-\; \frac{1}{\pi}\,z^{-3} \;+ \frac{1}{2}\,z^{-4} \;-\; \frac{1}{\pi}\,z^{-5} \;+\; \frac{1}{3\,\pi}\,z^{-7} \;\;.$$

Παρατηρούμε όμως ότι και το φίλτρο

$$H_1(z) \;=\; z\,H(z) \;=\; \frac{1}{3\,\pi} \;-\; \frac{1}{\pi}\,z^{-2} \;+\frac{1}{2}\,z^{-3} \;-\; \frac{1}{\pi}\,z^{-4} \;+\; \frac{1}{3\,\pi}\,z^{-6} \;\;.$$

θα έχει το ίδιο μέτρο απόκρισης συχνότητας με το προηγούμενο, άρα αποτελεί την επιθυμητή μας επιλογή.
Ένα αποτελεσματικό διάγραμμα υλοποίησης του παραπάνω φίλτρου θα πρέπει να εκμεταλλευτεί τη συμμετρία των τιμών της κρουστικής απόκρισης γύρω από το σημείο $M/2 = 3$.
