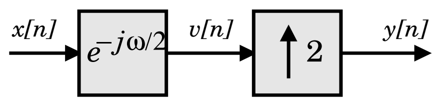
Άσκηση 1(a):

Στο σύστημα του σχήματος, η είσοδος είναι η $x[n] = \delta[n]$. Σχεδιάστε το πλάτος και την φάση του $Y(e^{j\omega})$ της εξόδου (για $|\omega| < \pi$).



Λύση: Λύνουμε το πρόβλημα στο πεδίο της συχνότητας. Συμβολίζουμε με $v[n]$ την έξοδο του πρώτου υποσυστήματος (όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα), και έχουμε:

$$x[n] = \delta[n] \;\; \Rightarrow \;\; X(e^{j\omega}) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; V(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2} \; ,$$

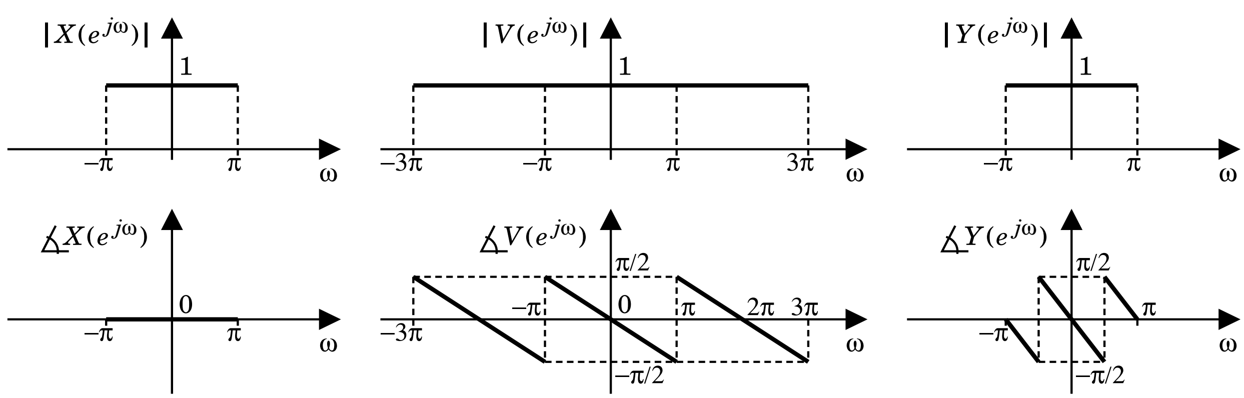
για $-\pi < \omega \leq \pi$, όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο DTFT του $\delta[n]$ είναι μονάδα. Το φάσμα (πλάτος και φάση) του $V(e^{j\omega})$ έχει σχεδιαστεί στο παρακάτω σχήμα για τρεις περιόδους, για να βοηθηθεί η σχεδίαση του $Y(e^{j\omega})$. Στην συνέχεια, με βάση το ότι $Y(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega 2})$, λόγω της υπερδειγματοληψίας κατά 2, παίρνουμε:

$$Y(e^{j\omega}) \; = \; \begin{cases} e^{-j\omega - j\pi} \; , & -\pi < \omega < -\pi/2 \\ e^{-j\omega} \; , & |\omega| \leq \pi/2 \\ e^{-j\omega + j\pi} \; , & \pi/2 < \omega \leq \pi \end{cases} \; .$$

Κατά συνέπεια, $|\,Y(e^{j\omega})\,| \; = \; 1$ για $-\pi < \omega \leq \pi$ και

$$\arg\{\,Y(e^{j\omega})\,\} \; = \; \begin{cases} -\omega \, - \, \pi \; , & -\pi < \omega < -\pi/2 \\ -\omega \; , & |\omega| \leq \pi/2 \\ -\omega \, + \, \pi \; , & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases} \; ,$$

τα οποία και σχεδιάζονται στο παρακάτω σχήμα για μία περίοδο $(\,-\pi\,,\pi\,]$.



Άσκηση 1(b):

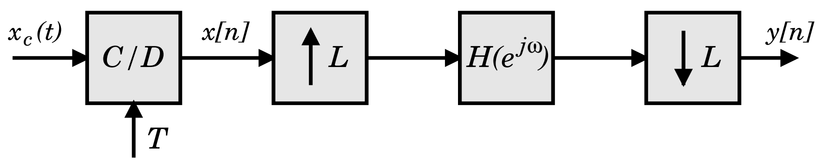
Στο σύστημα του παρακάτω σχήματος, έχουμε:

$$X_c(j\,\Omega) = 0\ , \quad \text{για} \quad |\Omega| \geq \pi/T\ \ ,$$

και

$$H(e^{j\,\omega})\ =\ \begin{cases} e^{-j\,\omega}\ , & |\omega| \leq \pi/L \\ 0\ , & \pi/L < |\omega| \leq \pi\ \ . \end{cases}$$

Εκφράστε το $y[n]$ ως συνάρτηση του $x_c(t)$.

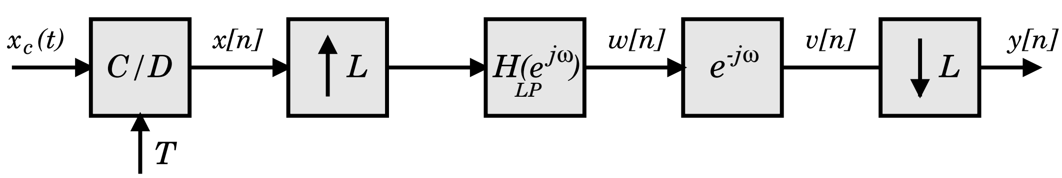


Λύση: «Σπάμε»το τρίτο υποσύστημα στην ακολουθία του ιδανικού κατωπερατού φίλτρου $H_{LP}(e^{j\,\omega})$ και ενός καθυστερητή $e^{-j\,\omega}$, δηλ. $H(e^{j\,\omega})\ =\ H_{LP}(e^{j\,\omega})\,e^{-j\,\omega}$, όπου:

$$H_{LP}(e^{j\,\omega})\ =\ \begin{cases} 1\ , & |\omega| \leq \pi/L \\ 0\ , & \pi/L < |\omega| \leq \pi\ \ , \end{cases}$$

όπως φαίνεται στο σχήμα. Για διευκόλυνση, συμβολίζουμε με $w[n]$ και $v[n]$ τις εξόδους του τρίτου και τέταρτου υποσυστήματος του σχήματος, και παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός του δεύτερου και τρίτου υποσυστήματος αποτελούν έναν upsampler, χωρίς ωστόσο το κατάλληλο κέρδος L στο τρίτο υποσύστημα. Επίσης παρατηρούμε πώς λόγω του ζωνοπεριορισμού του σήματος εισόδου δεν υπάρχει φαινόμενο αναδίπλωσης κατά την δειγματοληψία του $x_c(t)$, και κατά συνέπεια ισχύει η δεύτερη εξίσωση από τις παρακάτω.
Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} x[n] &= x_c(nT)\ , \\ w[n] &= \frac{1}{L}\,x_c(n\,\frac{T}{L})\ , \\ v[n] &= w[n-1]\ =\ \frac{1}{L}\,x_c(n\,\frac{T}{L} - \frac{T}{L})\ , \\ y[n] &= v[nL]\ =\ \frac{1}{L}\,x_c(n\,T - \frac{T}{L})\ . \end{aligned}$$



Άσκηση 2(a):

Σχεδιάστε ένα *ανωπερατό* (highpass) φίλτρο Butterworth τάξης 1 με συχνότητα στην απόσβεση 3 dB ίση με $\omega_c = 0.8\,\pi$. Χρησιμοποιείστε τον δι-γραμμικό μετασχηματισμό. Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του $H(z)$, και σχεδιάστε (ενδεικτικά) το μέτρο της απόκρισης συχνότητάς του $|H(e^{j\omega})|$. Μπορεί το φίλτρο να σχεδιαστεί και με την μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρουσης;

Λύση: Ακολουθώντας την μεθοδολογία του κεφ. 7.3.1 του βιβλίου του Μουστακίδη, έχουμε:

$$\omega_c = 0.8\,\pi \quad \Rightarrow \quad \Omega_c = \tan\left(\omega_c/2\right) \;=\; \tan\left(0.4\,\pi\right) \;=\; 3.0778 \;\;,$$

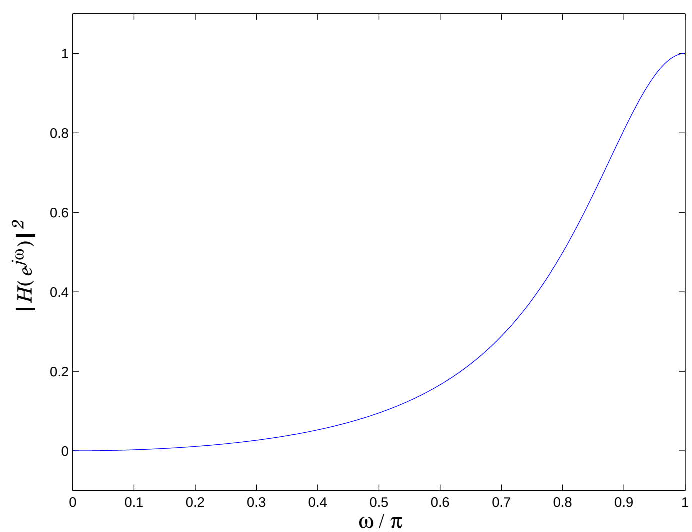
όπου χρησιμοποιήσαμε $T = 2$. Το ανωπερατό φίλτρο Butterworth τάξης 1 συνεχούς χρόνου θα έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) \;=\; \frac{\dfrac{1}{\Omega_c}}{\dfrac{1}{s} \,+\, \dfrac{1}{\Omega_c}} \;=\; \frac{s}{s \,+\, \Omega_c} \;=\; \frac{s}{s \,+\, 3.0778} \;\;,$$

όπου αντικαταστήσαμε στην συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου τάξης 1, $s \longrightarrow 1/s$ και $\Omega_c \longrightarrow 1/\Omega_c$.
Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το διγραμμικό μετασχηματισμό, πάλι με $T = 2$, και παίρνουμε:

$$H(z) \;=\; \frac{\dfrac{1 \,-\, z^{-1}}{1 \,+\, z^{-1}}}{\dfrac{1 \,-\, z^{-1}}{1 \,+\, z^{-1}} \,+\, 3.0778} \;=\; \frac{1 \,-\, z^{-1}}{4.0778 \,+\, 2.0778\,z^{-1}} \;\;.$$

Το τετράγωνο του μέτρου της απόκρισης συχνότητάς του δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι όντως το φίλτρο είναι ανωπερατό και ότι το μέτρο της απόκρισης συχνότητας είναι $1/\sqrt{2}$ για $\omega = 0.8\,\pi$.



Άσκηση 2(b):

Επιθυμούμε να σχεδιάσουμε ένα *κατωπερατό* φίλτρο με κρουστική απόκριση πεπερασμένου μήκους (FIR lowpass filter) που να ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$0.95 < |H(e^{j\omega})| < 1.05 \,, \quad \text{για} \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.25\,\pi$$

και

$$|H(e^{j\omega})| < 0.1 \,, \quad \text{για} \quad 0.35\,\pi \leq |\omega| \leq \pi \;\; .$$

Ο σχεδιασμός θα γίνει με την μέθοδο της παραθύρωσης. Ποια από τα παράθυρα του πίνακα 3.1 (σελ. 33) από το βιβλίο του Μουστακίδη μπορούν να χρησιμοποιηθούν επιτυχώς για τον σκοπό αυτό, και ποιο είναι το μήκος της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου σε κάθε περίπτωση;

Λύση: Παρατηρούμε ότι η πιο περιοριστική απαίτηση είναι αυτή της ζώνης διάβασης (passband). Κατά συνέπεια έχουμε: $\delta = 20\,\log_{10} 0.05 = -\,26.0206$ dB. Από τα παράθυρα του πίνακα 3.1 του βιβλίου του Μουστακίδη, τα τελευταία τρία έχουνε πλάτος απόκρισης δευτερεύοντος λοβού μικρότερο από αυτό, δηλαδή τα παράθυρα Hanning, Hamming, και Blackmann.
Στην συνέχεια, από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι $\Delta\,\omega \;=\; 0.35\,\pi \;-\; 0.25\,\pi \;=\; 0.1\,\pi$, κατά συνέπεια, από τον πίνακα 3.1 παίρνουμε για τα πρώτα δύο παράθυρα

$$\text{Hanning}\,,\;\; \text{Hamming} \;:\;\; 8\,\pi/L \;=\; 0.1\,\pi \;\;\Rightarrow\;\; L \;=\; 80\,,$$

$$\text{Blackmann} \;:\;\; 12\,\pi/L \;=\; 0.1\,\pi \;\;\Rightarrow\;\; L \;=\; 120\,.$$

Η κρουστική απόκριση των τελικών φίλτρων θα έχει μήκος $L+1$, αν και μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι για τα δύο από τα παραπάνω παράθυρα (Hanning, Blackmann) ισχύει $w[L] = 0$, οπότε το μήκος είναι μικρότερο (δηλ. L).

Άσκηση 3(a):

Δίνονται οι ακολουθίες τεσσάρων δειγμάτων:

$$x[n] \;=\; \cos\left(\frac{\pi\, n}{2}\right) \;, \quad h[n] \;=\; 2^{\,n} \;, \quad \text{για} \quad n = 0, 1, 2, 3 \;.$$

Υπολογίστε πρώτα τους DFT των $x[n]$ και $h[n]$, $X[k]$ και $H[k]$, για $N = 4$. Στη συνέχεια υπολογίστε την *γραμμική* και την *κυκλική* συνέλιξη των $x[n]$ και $h[n]$, και συγκρίνετε τις μεταξύ τους, όπως και με την ακολουθία που προκύπτει από τον αντίστροφο DFT του γινομένου $X[k]\,H[k]$ $(N = 4)$.

Λύση: Υπολογίζουμε πρώτα τον DFT του $x[n]$. Έχουμε:

$$X[k] \;= \sum_{n\,=\,0}^{3} \cos(\pi\, n/2)\, W_4^{kn} \;, \;\; 0 \;\leq\; k \;\leq\; 3 \;\;.$$

Επειδή το συνημίτονο συνεισφέρει μόνο δύο μη μηδενικές τιμές στα παραπάνω αθροίσματα (είναι μονάδα για $n = 0$ και -1 για $n = 2$), παίρνουμε:

$$X[k] \;=\; 1 \;-\; W_4^{2k} \;, \;\; 0 \;\leq\; k \;\leq\; 3 \;\;.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον DFT του $h[n]$. Έχουμε:

$$H[k] \;= \sum_{n\,=\,0}^{3} 2^{\,n}\, W_4^{kn} \;=\; 1 \;+\; 2\,W_4^{k} \;+\; 4\,W_4^{2k} \;+\; 8\,W_4^{3k} \;, \;\; 0 \;\leq\; k \;\leq\; 3 \;\;.$$

Μπορούμε να βρούμε την κυκλική συνέλιξη ως τον αντίστροφο DFT του γινομένου $X[k]\,H[k]$ (για $N = 4$). Πράγματι:

$$\begin{aligned} X[k]\,H[k] \;&=\; (1 \;-\; W_4^{2k})\,(1 \;+\; 2\,W_4^{k} \;+\; 4\,W_4^{2k} \;+\; 8\,W_4^{3k}) \\ &=\; 1 \;+\; 2\,W_4^{k} \;+\; 4\,W_4^{2k} \;+\; 8\,W_4^{3k} \;-\; W_4^{2k} \;-\; 2\,W_4^{3k} \;-\; 4\,W_4^{4k} \;-\; 8\,W_4^{5k} \\ &=\; -3 \;-\; 6\,W_4^{k} \;+\; 3\,W_4^{2k} \;+\; 6\,W_4^{3k} \;\;, \qquad 0 \;\leq\; k \;\leq\; 3 \;\;, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι $W_4^{4k} = 1$ και $W_4^{5k} = W_4^{k}$. Κατά συνέπεια, η κυκλική συνέλιξη δίνεται από:

$$\text{IDFT}\{X[k]\,H[k]\} = \; -3\,\delta[n] \;-\; 6\,\delta[n-1] \;+\; 3\,\delta[n-2] \;+\; 6\,\delta[n-3] \;\;,$$

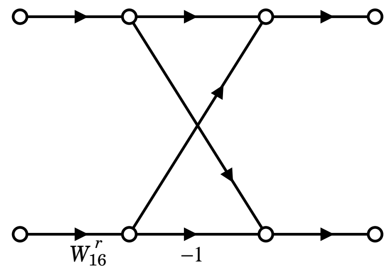
ορισμένη φυσικά για $0 \;\leq\; n \;\leq\; 3\,.$
Παρατηρούμε πως η κυκλική συνέλιξη μπορεί να υπολογιστεί και από την γραμμική συνέλιξη των δύο ακολουθιών, που εύκολα μπορεί να βρεθεί ότι ισούται με

$$x[n] * y[n] \;=\; \delta[n] \;+\; 2\,\delta[n-1] \;+\; 3\,\delta[n-2] \;+\; 6\,\delta[n-3] \;-\; 4\,\delta[n-4] \;-\; 8\,\delta[n-5] \;\;,$$

αν πάρουμε υπόψη μας το φαινόμενο της χρονικής αναδίπλωσης στα σημεία $4 \;\rightarrow\; 0$ και $5 \;\rightarrow\; 1\,.$

Άσκηση 3(b)**:**

Το διάγραμμα ροής πεταλούδας (butterfly) του παρακάτω σχήματος αποτελεί τμήμα της υλοποίησης του αλγορίθμου FFT με αποδεκατισμό στον χρόνο (decimation in time), για μήκος μετασχηματισμού $N = 16$. Πόσα είναι τα στάδια/βήματα του διαγράμματος υλοποίησης του FFT, και ποιες είναι οι πιθανές τιμές του r για κάθε ένα από τα στάδια/βήματα αυτά; Σε ποια στάδια υπάρχουν πεταλούδες με τιμή $r = 2$;



Λύση: Με βάση τον αλγόριθμο υλοποίησης FFT αποδεκατισμού στον χρόνο, είναι εύκολο να δούμε πως στο:

- Πρώτο στάδιο, έχουμε $r = 0$.
- Δεύτερο στάδιο, έχουμε $r = 0, 4$.
- Τρίτο στάδιο, έχουμε $r = 0, 2, 4, 6$.
- Τέταρτο στάδιο, έχουμε $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

(Αυτό αποτελεί μία γενίκευση του σχ. 4.2 του βιβλίου του Μουστακίδη για ένα ακόμη στάδιο). Κατά συνέπεια, η πεταλούδα του σχήματος με τιμή $r = 2$ συναντιέται μόνο στο τρίτο και τέταρτο στάδιο του αλγορίθμου υλοποίησης του FFT με αποδεκατισμό στον χρόνο.

Άσκηση 4(a):

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το φάσμα του σήματος διακριτού χρόνου

$$x[n] = \cos(\pi\, n/4) \,+\, \cos(17\pi\, n/64) \ ,$$

χρησιμοποιώντας ένα ορθογώνιο παράθυρο $w[n]$ με μήκος 64, και διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) μήκους επίσης 64. Εξηγήστε εάν αναμένετε να διακρίνονται δύο διαχωρίσιμες κορυφές που αντιστοιχούν στις συχνότητες των δύο συνημίτονων, ή όχι.

Λύση: Οι συχνότητες των δύο συνημίτονων διαφέρουν κατά

$$\Delta\,\omega \;=\; \left|\, \frac{\pi}{4} \;-\; \frac{17\,\pi}{64} \,\right| \;=\; \frac{\pi}{64} \ .$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά αυτή είναι κατά πολύ μικρότερη από το πλάτος του κύριου λοβού του ορθογώνιου παραθύρου $\Delta\,\omega_w \;=\; 4\,\pi/64$ (βλέπε πίνακα 3.1 του βιβλίου του Μουστακίδη με $L = 64$). Κατά συνέπεια, δεν αναμένουμε να δούμε δύο διαχωρίσιμες κορυφές.

Άσκηση 4(b):

Δίνεται το σήμα:

$$x[n] = \begin{cases} \cos(\pi\, n/6)\,, & 0 \leq n \leq 35 \\ \cos(\pi\, n/2)\,, & 36 \leq n \leq 71 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$$

του οποίου θέλουμε να εκτιμήσουμε το φασματόγραμμα. Υπολογίστε τα δείγματα

$$X[rR, k] = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR+m]\, w[m]\, e^{-j\,(2\,\pi/N)\,k\,m}\,,$$

για $-\infty < r < \infty$ και $0 \leq k \leq N-1$, όπου το $w[n]$ είναι ένα ορθογώνιο παράθυρο μήκους $L = 36$, ο DFT έχει μήκος $N = 36$, και η δειγματοληψία στο χρόνο γίνεται επίσης με $R = 36$.

Λύση: Από τον ορισμό του $X[rR, k]$ και το γεγονός ότι το σήμα είναι μηδενικό για $n < 0$ και $n > 71$, είναι προφανές ότι τα ζητούμενα δείγματα είναι μηδενικά για $r < 0$ και $r > 1$.
Για $r = 0$ μόνο το πρώτο συνημίτονο συνεισφέρει στο ζητούμενο άθροισμα, και το ζητούμενο είναι ο DFT 36 σημείων του

$$\cos(\pi\, n/6) \;=\; \frac{1}{2}\,(e^{j\,\frac{2\pi}{36}\,3\,n} \;+\; e^{-j\,\frac{2\pi}{36}\,3\,n}\,)$$

Από τις ιδιότητες του DFT (δυικότητα, μετατόπιση στον χρόνο), παίρνουμε:

$$X[0,k] \;=\; \frac{36}{2}\,\delta[<k-3>_{36}] \;+\; \frac{36}{2}\,\delta[<k+3>_{36}] \;=\; 18\,\delta[k-3] \;+\; 18\,\delta[k-33] \;\;.$$

Παρόμοια, για $r = 1$, μόνο το δεύτερο συνημίτονο συνεισφέρει στο άθροισμα, οπότε παίρνουμε:

$$X[36,k] \;=\; \frac{36}{2}\,\delta[<k-9>_{36}] \;+\; \frac{36}{2}\,\delta[<k+9>_{36}] \;=\; 18\,\delta[k-9] \;+\; 18\,\delta[k-27] \;\;.$$