Λύσεις Προόδου 17-5-2012

Θέμα 1(a): (10%)

Στο σήμα συνεχούς χρόνου $x_c(t) = \sin(10\pi t) + \cos(20\pi t)$ έχει γίνει δειγματοληψία με περίοδο T και, ως αποτέλεσμα, έχει προκύψει το σήμα διακριτού χρόνου

$$x[n] = \sin(\frac{\pi n}{5}) + \cos(\frac{2\pi n}{5}) \; .$$

Βρείτε την περίοδο δειγματοληψίας. Είναι μοναδική; Αν όχι, εντοπίστε και δεύτερη κατάλληλη περίοδο T, συμβατή με τα παραπάνω. Θα υπάρχει φαινόμενο αναδίπλωσης (aliasing) κατά την ανακατασκευή του σήματος συνεχούς χρόνου από το σήμα διακριτού χρόνου;

Λύση: Μετά από δειγματοληψία με περίοδο T λαμβάνει χώρα η αντικατάσταση $t \longrightarrow nT$, και κατά συνέπεια έχουμε:

$$x_c(t) \longrightarrow x[n] = \sin(10\pi nT) + \cos(20\pi nT) \; .$$

Παρατηρούμε ότι μία επιλογή περιόδου που κάνει το σήμα αυτό να ισούται με το δεδομένο στην εκφώνηση της άσκησης είναι αυτή που ικανοποιεί:

$$10\pi nT = \pi n/5 \Rightarrow T = 1/50 \; ,$$

και

$$20\pi nT = 2\pi n/5 \Rightarrow T = 1/50 \; .$$

Οι επιλογές αυτές είναι συμβατές, άρα η απάντηση είναι $T = 1/50 = 0.02$. Παρατηρούμε ότι η επιλογή αυτής της περιόδου ικανοποιεί το θεώρημα της δειγματοληψίας του Shannon, καθόσον το Niquist rate ισούται με 20 Hz, άρα $T_{\max} = 1/20 = 2.5/50$, και συνεπώς $T \le T_{\max}$. Δεν υπάρχει δηλαδή φαινόμενο αναδίπλωσης.

Παρατηρούμε ωστόσο ότι η παραπάνω επιλογή δεν είναι μοναδική. Πράγματι, λόγω περιοδικότητας των συναρτήσεων $\sin(\bullet)$ και $\cos(\bullet)$, έχουμε άπειρες δυνατές λύσεις, μία εκ των οποίων είναι αυτή που ικανοποιεί τις:

$$10\pi nT = \pi n/5 + 2\pi n \Rightarrow 10\pi nT = \frac{11\pi n}{5} \Rightarrow T = 11/50 \; ,$$

και

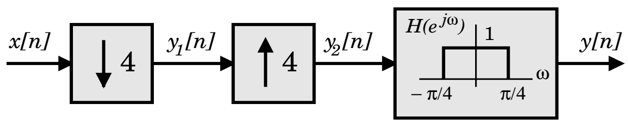
$$20\pi nT = 2\pi n/5 + 4\pi n \Rightarrow 20\pi nT = \frac{22\pi n}{5} \Rightarrow T = 11/50 \; ,$$

άρα η επιλογή αυτή είναι συμβατή μεταξύ των δύο εξισώσεων και συνεπώς $T = 11/50 = 0.22$ αποτελεί μία δυνατή περίοδο δειγματοληψίας που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος. Φυσικά όμως δεν ικανοποιεί το θεώρημα της δειγματοληψίας του Shannon, καθόσον $T > T_{\max}$, και κατά συνέπεια υπάρχει φαινόμενο αναδίπλωσης.

Θέμα 1(b): (15%)

Ποια είναι η έξοδος $y[n]$ του συστήματος του σχήματος, όταν η είσοδος $x[n]$ είναι η

$$x[n] = \left[\frac{\sin(\pi\, n/8)}{\pi n}\right]^2$$



Λύση: Αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα αυτό στο πεδίο της συχνότητας. Έχουμε λοιπόν για το σήμα εισόδου:

$$x[n] = \frac{\sin(\pi\, n/8)}{\pi n} \cdot \frac{\sin(\pi\, n/8)}{\pi n} \;\Rightarrow\; X(e^{j\,\omega}) \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\,\Pi(e^{j\,\omega}) * \Pi(e^{j\,\omega})\;,$$

όπου

$$\Pi(e^{j\,\omega}) \;=\; \begin{cases} 1\;,\; |\omega| \leq \pi/8 & . \\ 0\;,\; \pi/8 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς πως η συνέλιξη των δύο ιδίων παλμών είναι ένα σήμα με τριγωνικό φάσμα εκτεινόμενο στο διάστημα $[-\pi/4\,,\,\pi/4]$, με μηδενική τιμή στα $\pm\pi/4$ και μέγιστη τιμή στο $\omega = 0$, ίση με $\pi/4$. Φυσικά η τιμή αυτή πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το $1/2\,\pi$, οπότε λαμβάνουμε μέγιστη τιμή φάσματος του σήματος εισόδου ίση με $1/8$.
Στη συνέχεια το σήμα περνάει από έναν downsampler, κατά συνέπεια το φάσμα βρίσκεται με άθροιση τεσσάρων όρων,

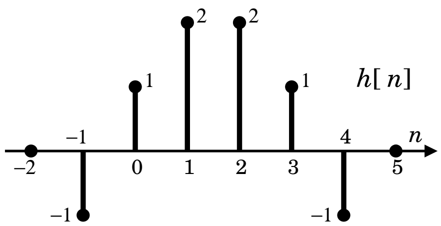
$$Y_1(e^{j\,\omega}) \;=\frac{1}{4}\left[\, X(e^{j\,\frac{\omega}{4}}) \;+\; X(e^{j\,(\,\frac{\omega}{4}-\frac{2\,\pi}{4}\,)}) \;+\; X(e^{j\,(\,\frac{\omega}{4}-\frac{4\,\pi}{4}\,)}) \;+\; X(e^{j\,(\,\frac{\omega}{4}-\frac{6\,\pi}{4}\,)})\,\right].$$

Καθόσον ωστόσο το σήμα εισόδου είναι ζωνοπεριορισμένο μεταξύ $[-\pi/4\,,\,\pi/4]$, μόνο ο πρώτος όρος του αθροίσματος θα δώσει φάσμα μεταξύ των $[-\pi\,,\,\pi]$. Η έξοδος κατά συνέπεια θα είναι πάλι ένα τριγωνικό σήμα που θα καλύπτει ωστόσο τώρα (λόγω κλιμάκωσης) όλο το διάστημα $[-\pi\,,\,\pi]$, με μηδενική τιμή στα $\pm\,\pi$ και μέγιστη τιμή $1/4\,.\,1/8 \,=\, 1/32$ στο $\omega = 0$.
Στη συνέχεια το σήμα περνάει από έναν upsampler, οπότε το φάσμα εξόδου προκύπτει με μία κλιμάκωση του φάσματος εισόδου, $Y_2(e^{j\,\omega}) \;=\; Y_1(e^{j\,\omega/4})$. Αυτό συνεπάγεται ένα φάσμα εξόδου με μορφή «πριονιού», δηλαδή με μηδενικές τιμές στα $\pm\,\pi/4$ και $\pm\,3\,\pi/4$ και μέγιστη τιμή $1/32$ στα $\omega = 0\,,\,\pm\,\pi/2\,,\,\pm\,\pi$.
Τέλος το σήμα φιλτράρεται με το συγκεκριμένο ιδανικό κατωπερατό φίλτρο $H(e^{j\,\omega})$ της εκφώνησης, κατά συνέπεια από αυτό παραμένει μόνο το τριγωνικό φάσμα στο $[-\pi/4\,,\,\pi/4]$ με μέγιστη τιμή στο $\omega = 0$ ίση με $1/32$.
Δηλαδή το σήμα εξόδου έχει το ίδιο φάσμα με το σήμα εισόδου με την εξαίρεση μίας πολλαπλασιαστικής σταθεράς $(1/32)/(1/8) \;=\; 1/4$. Κατά συνέπεια, το σήμα εξόδου είναι το $1/4$ του αρχικού σήματος εξόδου, δηλαδή:

$$y[n] = \frac{1}{4}\;\left[\frac{\sin(\pi\, n/8)}{\pi n}\right]^2\;.$$

Θέμα 2(a): (12%)

Ποια είναι η καθυστέρηση ομάδας του γραμμικά χρονικά αναλλοίωτου συστήματος με κρουστική απόκριση που δίνεται στο παρακάτω σχήμα;



Λύση: Παρατηρούμε ότι η κρουστική απόκριση είναι συμμετρική γύρω ως προς το σημείο $3/2 = 1.5$, δηλαδή ισχύει $h[n] = h[3-n]$. Πρόκειται κατά συνέπεια για FIR σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης Τύπου II, και συνεπώς η καθυστέρηση ομάδας είναι $\tau = 3/2$. Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε την απόκριση συχνότητας του συστήματος:

$$H(e^{j\omega}) = -e^{j\omega} + 1 + 2e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} - e^{-j4\omega}$$

$$= e^{-j3\omega/2}[(-e^{j5\omega/2} - e^{-j5\omega/2}) + (e^{j3\omega/2} + e^{-j3\omega/2}) + (2e^{j\omega/2} + 2e^{-j\omega/2})]$$

$$= e^{-j3\omega/2}[-2\cos(\frac{5\omega}{2}) + 2\cos(\frac{3\omega}{2}) + 4\cos(\frac{\omega}{2})].$$

Η ποσότητα εντός της αγκύλης είναι πραγματικός αριθμός, και κατά συνέπεια η φάση της απόκρισης συχνότητας είναι $-3\omega/2$ ή $-3\omega/2 + \pi$. Παραγωγίζοντας ως προς ω, αγνοώντας τις ασυνέχειες, και αντιστρέφοντας το πρόσημο, παίρνουμε $\tau = 3/2$.

Θέμα 2(b): (13%)

Έστω το αιτιατό γραμμικά χρονικά αναλλοίωτο σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{4}\,y[n-2] = x[n-2] - \frac{1}{4}x[n] \ \ .$$

Στο σύστημα αυτό έχει είσοδο ένα σήμα μήκους N (μηδενικό εκτός του διαστήματος $[0, N-1]$), για το οποίο ισχύει

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \;=\; 10 \ \ .$$

Αν $y[n]$ είναι η έξοδος του συστήματος, βρείτε την τιμή του αθροίσματος

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y[n]|^2 \ \ .$$

Λύση: Από την εξίσωση διαφορών παίρνουμε:

$$y[n]-\frac{1}{4}\,y[n-2] = x[n-2]-\frac{1}{4}x[n] \ \Rightarrow\ Y(z)\,(\,1-\frac{1}{4}\,z^{-2}\,) \;=\; X(z)\,(\,z^{-2}-\frac{1}{4}\,)$$

$$\Rightarrow\ H(z) \;=\; \frac{Y(z)}{X(z)} \;=\; \frac{z^{-2}\;-\;\frac{1}{4}}{1\;-\;\frac{1}{4}\,z^{-2}} \;=\; \left(\frac{z^{-1}\;-\;\frac{1}{2}}{1\;-\;\frac{1}{2}\,z^{-1}}\right)\left(\frac{z^{-1}\;+\;\frac{1}{2}}{1\;+\;\frac{1}{2}\,z^{-1}}\right)\ .$$

Αναγνωρίζουμε πως και οι δύο παράγοντες (κλάσματα) της απόκρισης συχνότητας αντιστοιχούν σε all pass (ολοπερατά) συστήματα, άρα $|\,H(e^{j\omega})\,| \;=\; 1$. Στη συνέχεια από το θεώρημα του Parseval (διπλή εφαρμογή) έχουμε:

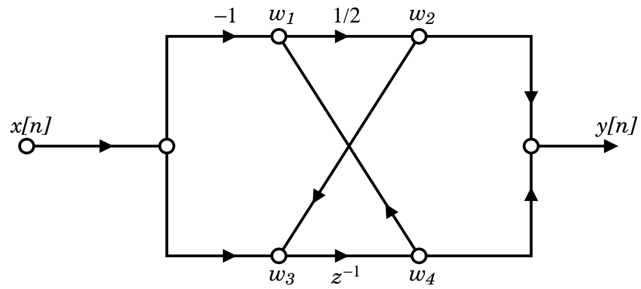
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y[n]|^2 \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\,Y(e^{j\omega})\,|^2\,\mathrm{d}\,\omega \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\,H(e^{j\omega})\,|^2\,|\,X(e^{j\omega})\,|^2\,\mathrm{d}\,\omega$$

$$=\; \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\,X(e^{j\omega})\,|^2\,\mathrm{d}\,\omega \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \;=\; 10\,,$$

παίρνοντας εύκολα την ζητούμενη απάντηση.

Θέμα 3: (25%)

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται το διάγραμμα ενός γραμμικά χρονικά αναλλοίωτου συστήματος. Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(z)$, και σχεδιάστε το σε κανονική μορφή I και II. Σχεδιάστε επίσης το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του συστήματος, $|H(e^{j\omega})|$.



Λύση: Εισάγοντας τις βοηθητικές μεταβλητές του σχήματος, γράφουμε εξισώσεις για όλους τους κόμβους στο πεδίο του μετασχηματισμού Z, ως εξής:

$$\begin{aligned} W_1(z) &= -X(z) + W_4(z) \\ W_2(z) &= \frac{1}{2} W_1(z) \\ W_3(z) &= W_2(z) + X(z) \\ Y(z) &= W_2(z) + W_4(z) \end{aligned}$$

Από την πρώτη και δεύτερη εξίσωση παίρνουμε:

$$W_2(z) = \frac{1}{2} \left(W_4(z) - X(z) \right),$$

ενώ από την τρίτη και τέταρτη:

$$W_4(z) = z^{-1} \left(W_2(z) + X(z) \right).$$

Αντικαθιστώντας την μία στην άλλη παίρνουμε από αυτές τις δύο εξισώσεις αντίστοιχα:

$$W_2(z) = \frac{\frac{1}{2}\left(z^{-1} - 1 \right)}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} X(z),$$

και:

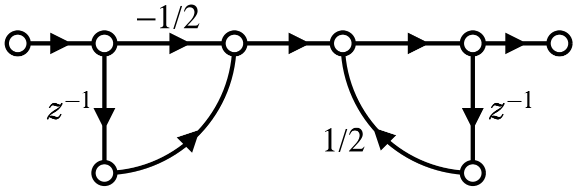
$$W_4(z) = \frac{z^{-1}\left(1 - \frac{1}{2} \right)}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} X(z) = \frac{\frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} X(z).$$

Αντικαθιστώντας τέλος στην πέμπτη εξίσωση από την πρώτη ομάδα, έχουμε:

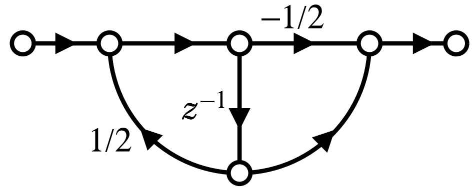
$$Y(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} X(z) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}.$$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για σύστημα all pass (ολοπερατό), άρα $|H(e^{j\omega})| = 1$.

Τέλος, στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η υλοποίηση του συστήματος στις ζητούμενες μορφές, δηλ. κανονική μορφή I και II, χρησιμοποιώντας signal flow graphs.



DIRECT FORM I



DIRECT FORM II

Θέμα 4: (25%)

Σχεδιάστε ένα κατωπερατό (lowpass) φίλτρο Butterworth τάξης 1 με συχνότητα στην απόσβεση 3 dB ίση με $\omega_c = 0.8\,\pi$. Χρησιμοποιείστε τον δι-γραμμικό μετασχηματισμό, όπως επίσης και την μέθοδο αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης. Βρείτε τις $H(z)$ σε κάθε περίπτωση. Δίνεται ότι $\tan(0.4\,\pi) = 3.078$.

Λύση : Με βάση τον τύπο των αναλογικών φίλτρων Butterworth (lowpass), καθόσον το φίλτρο είναι τάξης 1, έχουμε:

$$H(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c},$$

όπου στη συχνότητα Ω_c το φίλτρο έχει απόσβεση 3 dB.
Καθόσον το φίλτρο είναι κατωπερατό, η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Παίρνοντας $T = 1$, έχουμε $\Omega_c = \omega_c = 0.8\,\pi$, κατά συνέπεια, εφαρμόζοντας τον τύπο από το τυπολόγιο, έχουμε:

$$H(s) = \frac{0.8\,\pi}{s + 0.8\,\pi} \;\Rightarrow\; H(z) = \frac{0.8\,\pi}{1 - e^{-0.8\,\pi}\,z^{-1}}.$$

Εναλλακτικά, το φίλτρο μπορεί να σχεδιαστεί με την μέθοδο του δι-γραμμικού μετασχηματισμού. Έχουμε τότε:

$$\Omega_c = 2\tan(0.4\,\pi) = 6.156 \;\Rightarrow\; H(z) = \frac{6.156}{2\,\dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 6.156} = 3.078\,\frac{1 + z^{-1}}{4.078 - 2.078\,z^{-1}}.$$