HY 342 | DSP—HW2—SOLS | 2018-2019-A

(06/02/19)

1 $x[n] \overset{DFT_N}{\longleftrightarrow} X[k] \Rightarrow$ (a) $y[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n < N \\ x[n-N], & N \le n < 2N \end{cases} \overset{DFT_{2N}}{\longleftrightarrow} Y[k]$?

$\Rightarrow$ (b) $y[n] = \begin{cases} x[n/2], & 0 \le n < 2N \text{ άρτιο} \\ 0, & n \text{ περιττό} \end{cases} \overset{DFT_{2N}}{\longleftrightarrow} Y[k]$?

• $x[n] \overset{DFT_N}{\longleftrightarrow} X[k] \Rightarrow X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$; $0 \le k < N-1$ $\left(W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)$

(a) $y[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n < N \\ x[n-N], & N \le n < 2N \end{cases} \Rightarrow Y[k] = \sum_{n=0}^{2N-1} y[n] W_{2N}^{kn}$ $(0 \le k \le 2N-1)$

$$\Rightarrow Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn} + \sum_{n'=N}^{2N-1} x[n'-N] e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn'} \Rightarrow$$

$n = n' - N$ (για δεύτερο όρο)

$$\Rightarrow Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{2N}k(n+N)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y[k] = (1 + \underbrace{e^{-j\frac{\cancel{2}\pi k \cancel{N}}{\cancel{2N}}}}_{(-1)^k}) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{k}{2}\right)n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Y[k] = \begin{cases} 2X\left[\frac{k}{2}\right], & k = 0, 2, 4, \dots, 2N-2 \\ 0, & k = 1, 3, 5, \dots, 2N-1 \end{cases}}$$

(b) $y[n] = \begin{cases} x[n/2], & 0 \le n \text{ άρτιο} < 2N \\ 0, & n \text{ περιττό} \end{cases} \Rightarrow Y[k] = \sum_{n'=0}^{2N-1} y[n'] W_{2N}^{kn'}$ $(0 \le k \le 2N-1)$

$$\Rightarrow Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[2n] W_{2N}^{k2n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{\cancel{2}N}\cancel{2}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot kn}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y[k] = \begin{cases} X[k], & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ X[k-N], & k = N, N+1, \dots, 2N-1 \end{cases}}$$

2A $\quad x[n]=\delta[n]+\delta[n-4]+\delta[n-8]+\delta[n-12] \Rightarrow DFT_{16}\{x[n]\}=?$

- $X[k]=\sum_{n=0}^{15} x[n] W_{16}^{kn} = W_{16}^{0\cdot k}+W_{16}^{4k}+W_{16}^{8k}+W_{16}^{12k} = \dfrac{1-W_{16}^{4\cdot 4k}}{1-W_{16}^{4k}} =$

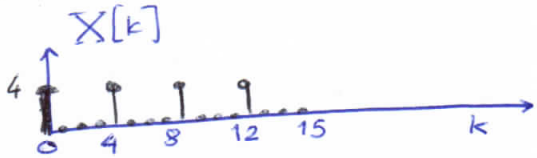
$$= \frac{1-W_{16}^{16k}}{1-W_{16}^{4k}} = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{16}16k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{16}4k}} = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi k}{2}}}, \quad 0\le k\le 15$$

- Ο αριθμητής είναι πάντα μηδέν (για όλα τα k), ενώ ο παρανομαστής μηδενίζεται για τα k για τα οποία $e^{-j\frac{\pi k}{2}}=1$, δηλ $\frac{k\pi}{2}=2\lambda\pi \Leftrightarrow k=4\lambda$

- Για $k=4\lambda$ χρησιμοποιούμε τον κανόνα του de l'Hospital, οπότε:

$$\frac{d/dx(1-e^{-j2\pi x})}{d/dx(1-e^{-j\pi x/2})} = \frac{2\pi j\, e^{-j2\pi x}}{j\frac{\pi}{2}\, e^{-j\pi x/2}} = \frac{4\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}\frac{1}{1} = 4$$

- Άρα: $\boxed{X[k]=\begin{cases}4; & k=0,4,8,12\\ 0; & k=1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15\end{cases}}$



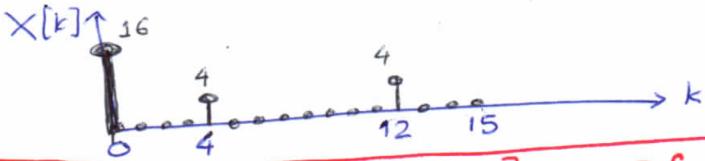
2B $\quad x[n]=\left[\cos^2\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]\cdot(u[n]-u[n-16]) \Rightarrow DFT_{16}\{x[n]\}=?$

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}+\cos^2\frac{\pi n}{4}\right)\cdot(\bullet) = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\frac{\pi n}{4})}{2}\right]\cdot(\bullet) = \left[1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]\cdot(\bullet) =$$

$$=\left[1+\frac{1}{4}e^{+j\frac{2\pi}{16}4n}+\frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{16}4n}\right]\cdot(\bullet) \Rightarrow$$ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑΣ ΔΥΙΚΟΤΗΤΑΣ

$$\xrightarrow{DFT_{16}} X[k] = 16\delta[k]+\frac{16}{4}\delta[k-4]+\frac{16}{4}\delta[\langle k+4\rangle_{16}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X[k]=16\delta[k]+4\delta[k-4]+4\delta[k-12] \quad ; 0\le k\le 15}$$



2C $\quad x[n]=\left[\left(\sin\frac{\pi n}{4}+\cos\frac{\pi n}{2}\right)(u[n]-u[n-16])\right] ⑯ \left[\left(\sin\frac{\pi n}{2}+\cos\frac{\pi n}{4}\right)(u[n]-u[n-16])\right] \Rightarrow DFT_{16}\{x[n]\}=?$

$x_1[n]=\left(\sin\frac{\pi n}{4}\right)\cdot(\bullet) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{16}2n}-e^{-j\frac{2\pi}{16}2n}\right)\cdot(\bullet) \xrightarrow{DFT_{16}} X_1[k]=\frac{8}{j}\delta[k-2]-\frac{8}{j}\delta[k-14]$

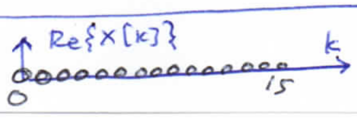
$x_2[n]=\left(\cos\frac{\pi n}{2}\right)\cdot(\bullet) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{16}4n}+e^{-j\frac{2\pi}{16}4n}\right)\cdot(\bullet) \xrightarrow{DFT_{16}} X_2[k]=8\delta[k-4]+8\delta[k-12]$

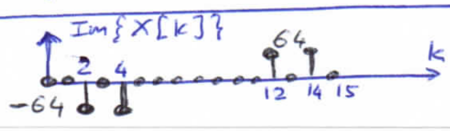
$x_3[n]=\left(\sin\frac{\pi n}{2}\right)\cdot(\ ) = \text{- - - - - - - -} \Rightarrow X_3[k]=\frac{8}{j}\delta[k-4]-\frac{8}{j}\delta[k-12]$

$x_4[n]=\left(\cos\frac{\pi n}{4}\right)\cdot(\ ) = \text{- - - - - - - -} \Rightarrow X_4[k]=8\delta[k-2]+8\delta[k-14]$

Αφού $x[n]=(x_1[n]+x_2[n])$ ⑯ $(x_3[n]+x_4[n]) \Rightarrow X[k]=(X_1[k]+X_2[k])\cdot(X_3[k]+X_4[k]) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{X[k]=-64j\,\delta[k-2]-64j\,\delta[k-4]+64j\,\delta[k-12]+64j\,\delta[k-14]; \quad 0\le k\le 15}$$





3A

$$X_c(t) \longrightarrow x[n] \xrightarrow{\text{WINDOWING}} v[n] \longrightarrow DFT_N \Rightarrow \Delta F_k\ ?$$

$T_s = 1/2000$ sec (1000 samples) $(N = 2000)$

$T_s = \frac{1}{2000} s \Rightarrow \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi \cdot 2000$ που αντιστοιχεί σε διάστημα 2π στις διακριτές συχνότητες.

Αφού $N = 2000 \Longrightarrow \Delta\Omega_k = \frac{2\pi \cdot \cancel{2000}}{\cancel{2000}} = 2\pi$ (με DFT_N έχουμε N samples εκεί)

$\Delta\Omega_k = \frac{2\pi}{NT}$

ή $\Delta F_k = \frac{\overset{=2\pi}{\Delta\Omega_k}}{2\pi} = 1\ Hz$

3B

$x_1[n]$ ΜΗΚΟΥΣ $N_1 = 100$
$x_2[n]$ ΜΗΚΟΥΣ $N_2 = 64$
$\Rightarrow$ για ποιά n $x_1[n]\ (128)\ x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$?

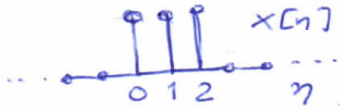
- Η γραμμική συνέλιξη των $x_1[n]$ & $x_2[n]$ θα έχει μήκος $N_1 + N_2 - 1 = 163$, δηλ. $x_1[n] * x_2[n]$ θα λαμβάνει χώρα στο $\boxed{0 \leq n \leq 162}$
- Το $x_1[n]\ (128)\ x_2[n]$ θα προκύψει από ALIASING της $x_1[n] * x_2[n]$, δηλαδή αναδίπλωση των τιμών $[128, 162] \rightarrow$ (35 ΤΙΜΕΣ) στην αρχή, δηλαδή από το 0 έως και το 34 $[0, 34]$
- Άρα δεν θα επηρεαστούν οι τιμές στο $\boxed{[35, 127]}$

3C

$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$ ΜΗΚΟΣ ΜΗΚΟΣ 64 ΧΡΗΣΗ OVERLAP ADD & DFT_{128} $\Rightarrow$? # DFTs + IDFTs ?

- $h[n]$ ΜΗΚΟΣ $P = 64$
- $x[n]$ SPLIT INTO BLOCKS OF LENGTH L, με $\underbrace{L + P - 1 = 128}_{}$ $\Leftrightarrow$ $L = 65$ [DFT length so that circular conv = linear conv
- Άρα θα χρειαστούμε $\left\lceil \frac{10{,}000}{L} \right\rceil$ SHIFTS/BLOCKS της $x[n]$ $= 154$ γραμμικές = κυκλικές συνελίξεις
- Κάθε συνέλιξη απαιτεί $IDFT\{DFT\{x[n]_{BLOCK}\} \cdot DFT\{h[n]\}\}$ ↳ υπολογίζεται μόνο μία φορά! (ίδιο για όλα τα shifts)
- Άρα $\#DFTs = 154 + 1 = \boxed{155}$
  $\#IDFTs = \boxed{154}$

(4) $x[n] = u[n] - u[n-3]$



(4A)

$DFT_3\{x[n]\} = ?$

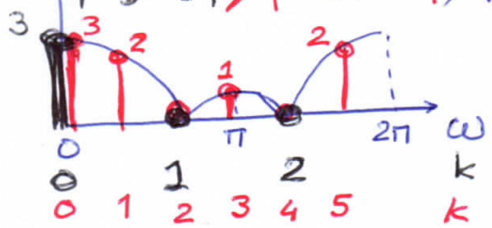
$DFT_6\{x[n]\} = ?$

$$X_3[k] = \sum_{n=0}^{2} \cancel{x[n]}^{\,1} W_3^{kn} = \frac{1-W_3^{3k}}{1-W_3^{k}} = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{\cancel{3}}\cancel{3}k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{3}k}} = \begin{cases} 3, & k=0 \\ 0, & k=1,2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{X_3[k] = 3\delta[k] \quad k=0,1,2}$$

$$X_6[k] = \sum_{n=0}^{2} W_6^{kn} = \frac{1-W_6^{3k}}{1-W_6^{k}} = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{6}3k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{6}k}} = \frac{e^{-j\frac{2\pi}{12}3k}\left(e^{j\frac{2\pi}{12}3k}-e^{-j\frac{2\pi}{12}3k}\right)}{e^{-j\frac{2\pi}{12}k}\left(e^{j\frac{2\pi}{12}k}-e^{-j\frac{2\pi}{12}k}\right)} =$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{12}2k} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{12}3k\right)\cdot \cancel{2j}}{\sin\left(\frac{2\pi}{12}k\right)\cdot \cancel{2j}} \Rightarrow \boxed{e^{-j\frac{\pi k}{3}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{6}\right)} = X_6[k] \quad k=0,1,\dots,5}$$

Σχεδιαστικά: $|X_3[k]|$, $|X_6[k]|$, $|X(e^{j\omega})|$



$$X_3[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{3}}$$

$$X_6[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{6}}$$

όπου $X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\dfrac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$

(4B)

$x[n]$ ③ $x[n] = ?$

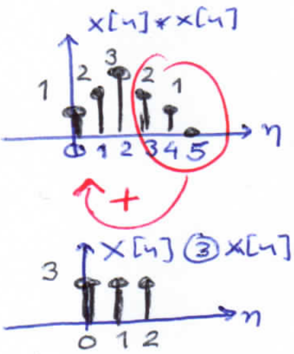
$x[n]$ ⑥ $x[n] = ?$

(λόγω του ότι $6 > 3+3-1$)

- Για $N=6$: $x[n]$ ⑥ $x[n] = x[n] * x[n] = (\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]) * (\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2])$

$$= \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] =$$

$$= \boxed{\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]}$$



- Για $N=3$: Προκύπτει με αναδίπλωση από τη γραμμική συνέλιξη (βλέπε σχήμα), ή εναλλακτικά ως:

$$x[n] ③ x[n] = IDFT_3\{DFT_3\{x[n]\} \cdot DFT_3\{x[n]\}\} =$$

$$= IDFT_3\{3\delta[k] \cdot 3\delta[k]\} =$$

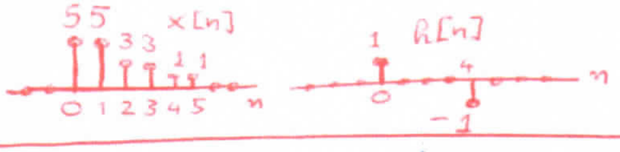
$$= IDFT_3\{9\delta[k]\} = \boxed{3(u[n]-u[n-3])}$$

(4C) $x[n]$ ③ $x[n]$ ③ $x[n]$ ③ $x[n]$ ③ $x[n]$ ③ $x[n] = ?$

Γενικεύοντας τον 2^o τρόπου υπολογισμού της $x[n]$ ③ $x[n]$ στο (4B), έχουμε:

$$\underbrace{x[n] ③ \dots ③ x[n]}_{\text{5 κυκλικές συνελίξεις}} = 3^5(u[n]-u[n-3]) = 243(u[n]-u[n-3])$$

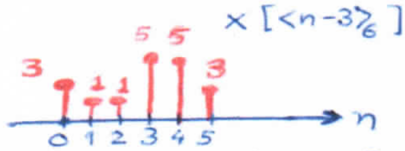
5

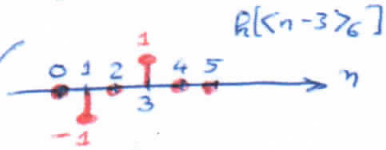


5ⓐ $y[n]=?$ με $Y_6[k]=(-1)^k\left[H[k]+X[k]\right]$

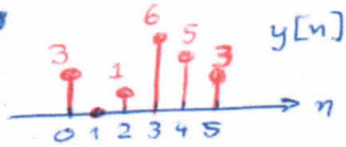
$$(-1)^k X_6[k] = e^{-j\frac{2\pi}{6}3k} X_6[k] \xleftrightarrow{DFT_6} x[\langle n-3\rangle_6]$$

$$(-1)^k H_6[k] = e^{-j\frac{2\pi}{6}3k} H_6[k] \xleftrightarrow{DFT_6} h[\langle n-3\rangle_6]$$





⊕



• Συνεπώς:

$$y[n] = x[\langle n-3\rangle_6] + h[\langle n-3\rangle_6] =$$

$$= \boxed{3\delta[n]+\delta[n-2]+6\delta[n-3]+5\delta[n-4]+3\delta[n-5]}$$

5ⓑ $y[n]=?$ με $Y_6[k]=X_6[k]H_6[k],\ 0\le k\le 5$

κυκλική συνέλιξη με $N=6$

• Από την ιδιότητα της κυκλικής συνέλιξης, $y[n]=x[n]\ \textcircled{6}\ h[n]$

• Για να υπολογίσουμε το $y[n]$, μπορούμε να βρούμε πρώτα τη γραμμική συνέλιξη $y'[n]=x[n]*h[n]$, και στη συνέχεια το $y[n]$ θα προκύψει με αναδίπλωση (ως προς $N=6$) της $y'[n]$.

• Έχουμε λοιπόν:

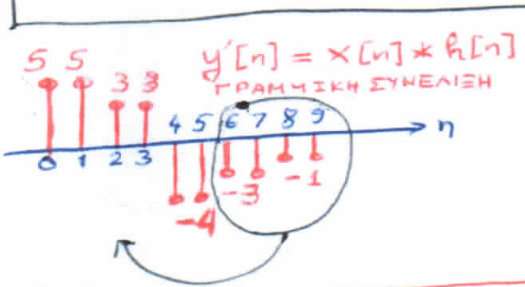
$$y'[n] = x[n]*h[n] = x[n]*\delta[n] - x[n]*\delta[n-4] =$$

$$= x[n]-x[n-4] = 5\delta[n]+5\delta[n-1]+3\delta[n-2]+3\delta[n-3]+\delta[n-4]+\delta[n-5] -5\delta[n-4]-5\delta[n-5]-3\delta[n-6]-3\delta[n-7]-\delta[n-8]-\delta[n-9]$$

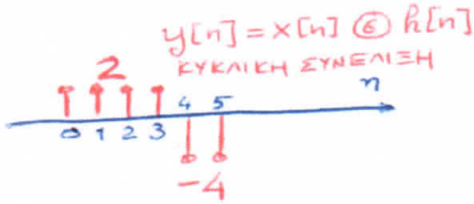
$$\Rightarrow \boxed{y'[n]=x[n]*h[n] = 5\delta[n]+5\delta[n-1]+3\delta[n-2]+3\delta[n-3]-4\delta[n-4]-4\delta[n-5]-3\delta[n-6]-3\delta[n-7]-\delta[n-8]-\delta[n-9]}$$

• Στη συνέχεια, με χρονική αναδίπλωση της $y'[n]$:

$$\boxed{y[n] = x[n]\ \textcircled{6}\ h[n] = 2\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]+2\delta[n-3]-4\delta[n-4]-4\delta[n-5]}$$



ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΝΑΔΙΠΛΩΣΗ



5ⓔ $y[n]=?$ με $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

• Από την ιδιότητα DTFT της γραμμικής συνέλιξης, $y[n]=x[n]*h[n]$

• Η απάντηση έχει δοθεί στο ερώτημα 3ⓑ, ως $y'[n]$.
(Βλέπε επίσης αριστερό σχήμα πιο πάνω).

5(C) $y[n] = ?$ με $Y_6[k] = Re\{X_6[k]\} + j\,Im\{H_6[k]\}$, $0 \le k \le 5$

- Από τις ιδιότητες συμμετρίας του DFT, έχουμε:

$$Re\{X_6[k]\} \xleftrightarrow{DFT_6} \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[\langle -n \rangle_6]\}$$

$$j\,Im\{X_6[k]\} \xleftrightarrow{DFT_6} \frac{1}{2}\{h[n] - h^*[\langle -n \rangle_6]\}$$

- Λόγω πραγματικών $x[n], h[n]$, και αθροίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$y[n] = \frac{1}{2}[x[n] + x[\langle -n \rangle_6] + h[n] - h[\langle -n \rangle_6]] =$$

$$= \frac{1}{2}\{5\delta[n] + 5\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5]$$
$$+ 5\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 3\delta[n-4] + 5\delta[n-5]$$
$$- \delta[n-4]$$
$$+ \delta[n]$$
$$- \delta[n] + \delta[n-2]\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = 5\delta[n] + 3\delta[n-1] + \frac{5}{2}\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + \frac{3}{2}\delta[n-4] + 3\delta[n-5]}$$

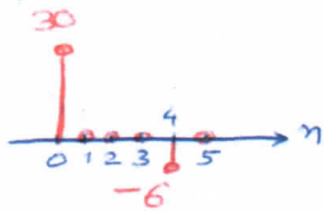
- Σχηματικά:

5(D) $y[n] = ?$ με $Y_6[k] = H_6[k] ⑥ X_6[k]$, $0 \le k \le 5$

- Από τη δυϊκότητα ιδιότητας γινομένου/κυκλικής συνέλιξης, έχουμε:

$$y[n] = 6\,x[n]\,h[n] \xleftrightarrow{DFT_6} X_6[k] ⑥ H_6[k]$$

- Συνεπώς, $\boxed{y[n] = 30\delta[n] - 6\delta[n-4]}$



6 FFT_{16} IMPLEMENTATION DIAGRAM (decimation in time)

- Η αναδιάταξη στο πεδίο του χρόνου γίνεται ως εξής:

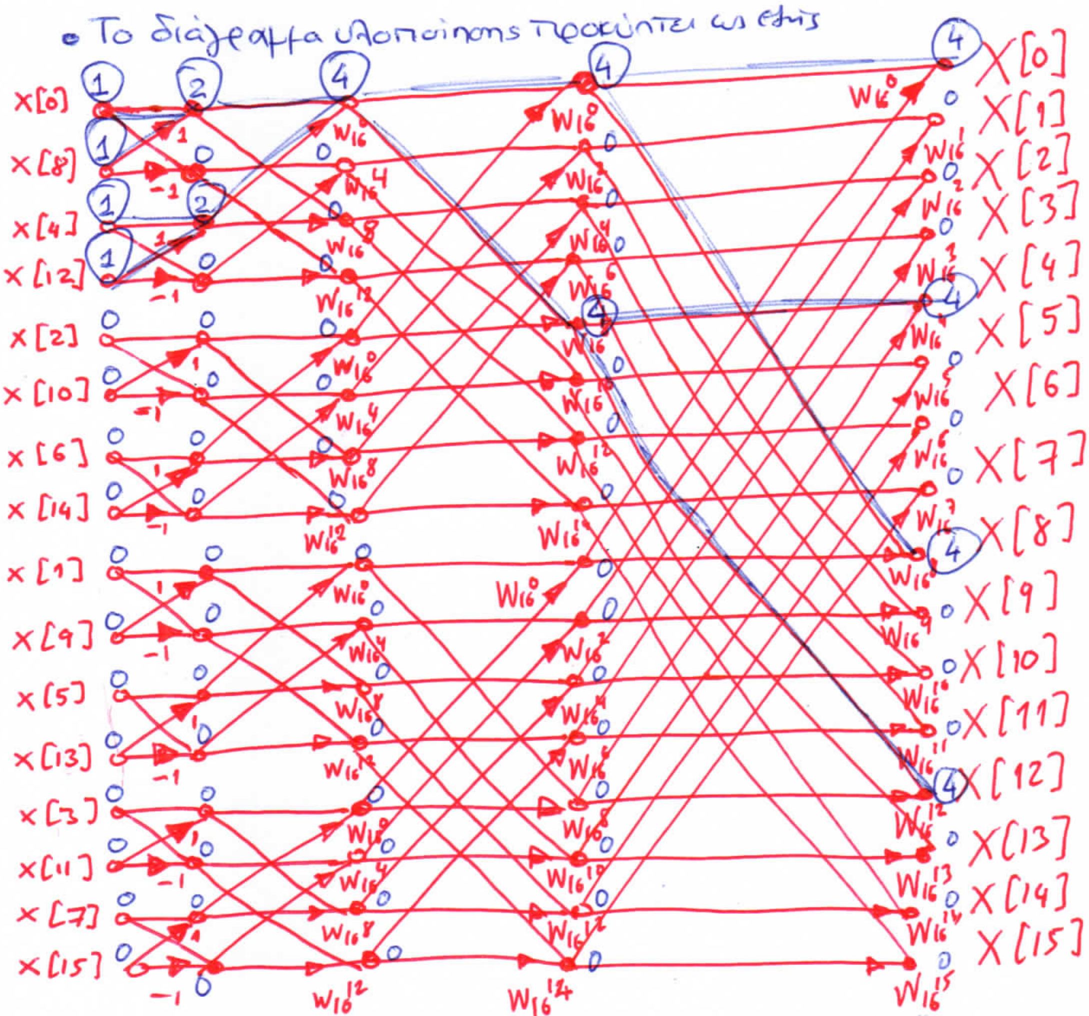
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

0 2 4 6 8 10 12 14 | 1 3 5 7 9 11 13 15

0 4 8 12 | 2 6 10 14 | 1 5 9 13 | 3 7 11 15

0 8 | 4 12 | 2 10 | 6 14 | 1 9 | 5 13 | 3 11 | 7 15

- Το διάγραμμα υλοποίησης προκύπτει ως εξής



6A COMPUTATIONAL COST

Με την υλοποίηση αυτή το κόστος είναι της τάξης $O(N\log_2 N)$ [δηλ $16\log_2 16 = 64$] αντί $O(N^2)$ [δηλ 256]

6B $x[n] = \delta[n] + \delta[n-4] + \delta[n-8] + \delta[n-12] \Rightarrow X[k] = ?$

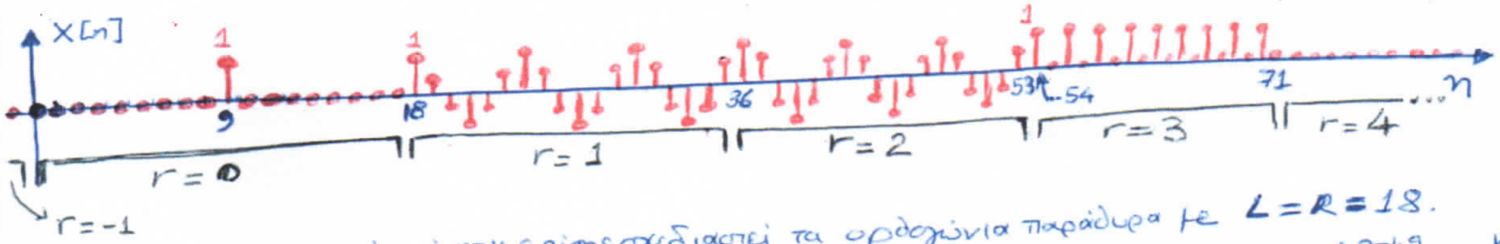
Οι υπολογισμοί φαίνονται στο διάγραμμα με ΜΠΛΕ χρώμα.

7

$$x[n] = \begin{cases} 0, & 0 \le n \le 8 \\ 1, & n = 9 \\ 0, & 0 \le n \le 17 \\ \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right), & 18 \le n \le 53 \\ 1, & n \text{ άρτιος εντός } 54 \le n \le 71 \\ 0, & n \text{ περιττός εντός } 54 \le n \le 71 \end{cases} \Longrightarrow$$

φασματόγραμμα με $N = L = R = 18$ (ορθογώνιο παράθυρο)

- Σχεδιάζουμε πρώτα το σήμα $x[n]$:



- Στο παραπάνω σχήμα έχουν επίσης σχεδιαστεί τα ορθογώνια παράθυρα με $L = R = 18$.
- Για $r = 0$, το παράθυρο "βλέπει" το σήμα $x'_0[n] = \begin{cases} 1, & n = 9 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \xRightarrow{DFT_{18}} X'_0[k] = e^{-j\frac{2\pi k 9}{18}} = (-1)^k$
- Για $r = 1$ & $r = 2$, τα παράθυρα "βλέπουν" το σήμα $x'_{1,2}[n] = \cos\frac{\pi n}{3} \cdot (u[n] - u[n-18]) =$
$= \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{18}3n} + e^{-j\frac{2\pi}{18}3n}\right) \cdot (u[n] - u[n-18]) \xRightarrow{DFT_{18}} X'_{1,2}[k] = 9\,\delta[k-3] + 9\,\delta[k-15]$
- Τέλος, για $r = 3$, το παράθυρο "βλέπει" το $x'_3[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 2, \ldots, 16 \\ 0, & n = 1, 3, \ldots, 17 \end{cases} \xRightarrow{DFT_{18}}$
$\Rightarrow X'_3[k] = \begin{cases} 9, & \text{για } k = 0, 9 \\ 0, & \text{για } k = 1, 2, \ldots 8, 10, \ldots 17 \end{cases}$

Συνεπώς:

$$X[rR, k] = \begin{cases} (-1)^k, & \text{για } r = 0,\ k \in [0, 17] \\ 9, & \text{για } r = 1, 2;\ k = 3, 15 \\ 9, & \text{για } r = 3;\ k = 0, 9 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$