Παν.Θεσ/λίας, ΤΗΜΜΥ ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ Ακαδ. Έτος 2018-19
Ημερομηνία: 10-01-2019 **2ο Σύνολο Ασκήσεων** Παραδοτέο: 06-02-2019

Οι ασκήσεις παραδίδονται στην **έναρξη** της τελικής εξέτασης της Τετάρτης, 06/02/19, στις **18:00** (Αμφ. Σαράτση), ή στο γραμματοκιβώτιο του διδάσκοντος πριν το διαγώνισμα (Γραφείο Γ3/2, κτήριο Δεληγιώργη). Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι **ατομικές**.

Άσκηση 1: Έστω σήμα $x[n]$ μήκους N με μ/σμό DFT μήκους N τον $X[k]$. Βρείτε τους DFT των παρακάτω ακολουθιών (μήκους $2N$) ως συνάρτηση των $X[k]$:

$$\text{(a)}\ \ y[n] = \begin{cases} x[n]\,, & 0 \le n < N \\ x[n-N]\,, & N \le n < 2N \end{cases}\,, \qquad \text{(b)}\ \ y[n] = \begin{cases} x[n/2]\,, & n \text{ άρτιος, εντός } 0 \le n < 2N \\ 0\,, & \text{αλλιώς} \end{cases}\,.$$

Άσκηση 2: Υπολογίστε και σχεδιάστε τους DFT μήκους $N = 16$ των ακολουθιών:

(a) $x[n] = \delta[n] + \delta[n-4] + \delta[n-8] + \delta[n-12]$.

(b) $x[n] = [\,1/2 + \cos^2(\pi n/4)\,]\,(u[n] - u[n-16])$.

(c) $x[n] = (\sin(\pi n/4) + \cos(\pi n/2))$ ⑯ $(\sin(\pi n/2) + \cos(\pi n/4))$,
όπου το ⑯ συμβολίζει κυκλική συνέλιξη μήκους 16, και οι ακολουθίες που συνελίσονται θεωρούνται μηδενικές εκτός του διαστήματος $[0, 15]$.

Άσκηση 3: Τα ακόλουθα είναι ανεξάρτητα ερωτήματα:

(a) Έστω σήμα συνεχούς χρόνου $x_c(t)$ υφίσταται δειγματοληψία με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = 1/2000$ sec και στη συνέχεια παραθύρωση ώστε να προκύψουν 1000 δείγματά του. Αν χρησιμοποιηθεί DFT 2000 σημείων σε αυτά, ποια είναι η ευκρίνεια (frequency resolution) της φασματικής ανάλυσης που προκύπτει στο πεδίο της αναλογικής συχνότητας;

(b) Έστω σήματα $x_1[n]$ και $x_2[n]$ μήκους $N_1 = 100$ και $N_2 = 64$ σημείων αντίστοιχα. Για ποιες τιμές του n θα ισούται η κυκλική συνέλιξή τους (χρησιμοποιώντας DFT 128 σημείων) με τη γραμμική συνέλιξή τους, δηλ. $x_1[n]$ ⑫⑧ $x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$;

(c) Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την έξοδο ενός αιτιατού Γ.Χ.Α. συστήματος διακριτού χρόνου με πεπερασμένη κρουστική απόκριση $h[n]$ μήκους 64 δειγμάτων σε είσοδο $x[n]$ μήκους 10000 δειγμάτων. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τη μέθοδο επικάλυψης/πρόσθεσης (overlap-add) με DFTs μήκους 128. Πόσους μετασχηματισμούς DFT και IDFT θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;

Άσκηση 4: Έστω το σήμα $x[n] = u[n] - u[n-3]$.

(a) Υπολογίστε τον DFT του, μήκους $N = 3$ και $N = 6$, σχολιάζοντας τις διαφορές.

(b) Υπολογίστε την κυκλική συνέλιξη $x[n]$ Ⓝ $x[n]$ για $N = 3$ και για $N = 6$.

(c) Τέλος, υπολογίστε το $\underbrace{x[n]\ ③\ x[n]\ ③ \cdots ③\ x[n]}_{\text{5 κυκλ. συνελίξεις}}$.

Άσκηση 5: Δίνονται οι δύο ακολουθίες πεπερασμένου μήκους $x[n]$ και $h[n]$ του παρακάτω σχήματος. Έστω επίσης $X[k]$ και $H[k]$ οι διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier (DFT) τους, μήκους $N = 6$ δειγμάτων, αντίστοιχα, όπως επίσης και οι μετασχηματισμοί Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) τους, $X(e^{j\omega})$ και $H(e^{j\omega})$, αντίστοιχα. Σχεδιάστε τις ακολουθίες διακριτού χρόνου και πεπερασμένου μήκους που έχουν:

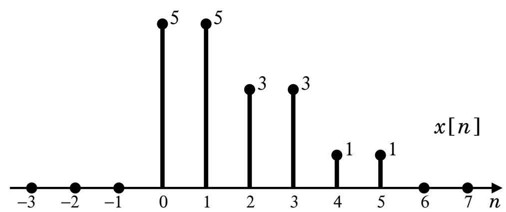
(a) DFT μήκους $N = 6$ που ισούται με $(-1)^k X[k] + (-1)^k H[k]$, για $0 \leq k \leq N-1$.

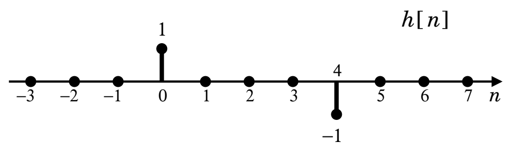
(b) DFT μήκους $N = 6$ που ισούται με $X[k]\, H[k]$, για $0 \leq k \leq N-1$.

(c) DFT μήκους $N = 6$ που ισούται με $\mathcal{R}eal\{X[k]\} + j\,\mathcal{I}mag\{H[k]\}$.

(d) DFT μήκους $N = 6$ ίσο με $X[k]$ ⑥ $H[k]$ (όπου ⑥ υποδηλώνει κυκλική συνέλιξη).

(e) DTFT ίσο με το γινόμενο $X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega})$.





Άσκηση 6: Σχεδιάστε το διάγραμμα υλοποίησης FFT για ακολουθία μήκους $N = 16$, με την μέθοδο αποδεκατισμού στον χρόνο (decimation in time). Στη συνέχεια:

(a) Συγκρίνετε τον αριθμό προσθέσεων και πολ/σμών που απαιτούνται σε σχέση με αυτούς που βασίζονται στο μαθηματικό τύπο ορισμού του DFT.

(b) Εφαρμόστε σαν είσοδο στο διάγραμμα το $x[n] = \delta[n] + \delta[n-4] + \delta[n-8] + \delta[n-12]$, και υπολογίστε τα $X[k]$ ($k = 0, \ldots, 15$) που προκύπτουν.

Άσκηση 7: Δίνεται το σήμα:

$$x[n] = \begin{cases} 0\,, & 0 \leq n \leq 8 \\ 1\,, & n = 9 \\ 0\,, & 10 \leq n \leq 17 \\ \cos(\pi\, n/3)\,, & 18 \leq n \leq 53 \\ 1\,, & n \text{ άρτιος, εντός } 54 \leq n \leq 71 \\ 0\,, & n \text{ περιττός, εντός } 54 \leq n \leq 71 \end{cases}$$

του οποίου θέλουμε να εκτιμήσουμε το φασματόγραμμα. Υπολογίστε (και σχεδιάσετε σε 3D) τα δείγματα

$$X[rR, k] = \sum_{m=0}^{L-1} x[rR+m]\, w[m]\, e^{-j\,(2\pi/N)\,k\,m}\,,$$

για $-\infty < r < \infty$ και $0 \leq k \leq N-1$, όπου το $w[n]$ είναι το ορθογώνιο παράθυρο μήκους $L = 18$, ο DFT έχει μήκος $N = 18$, και η δειγματοληψία στο χρόνο γίνεται επίσης με $R = 18$.