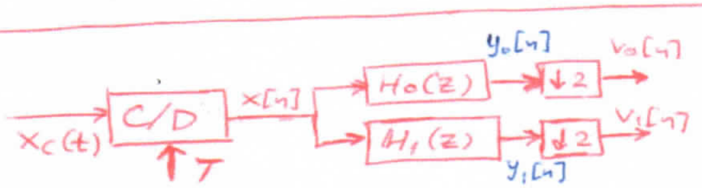
HY342 — DSP – HW1 – SOLS — 2018 – 2019 – A

(28/11/2018)

1



$\Rightarrow v_0[n], v_1[n] = ?$

$$h_0[n] = \frac{\delta[n] + \delta[n-1]}{2}, \quad h_1[n] = (-1)^n h_0[n]$$

$$x_c(t) = \cos(2\pi t)$$

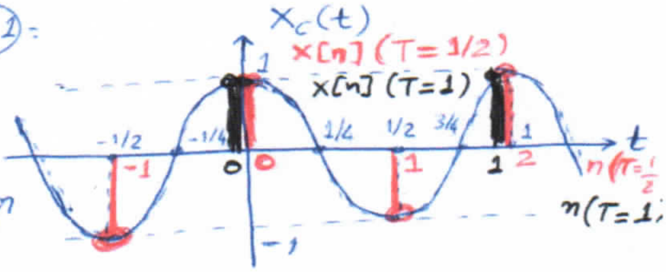
$$T = 1, \ T = 1/2$$

- Όπως φαίνεται και από το σχήμα, για $T=1$:

$$x[n] = \cos(2\pi n) = 1$$

και για την περίπτωση $T = 1/2$:

$$x[n] = \cos\left(\cancel{2}\pi \frac{n}{\cancel{2}}\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n$$

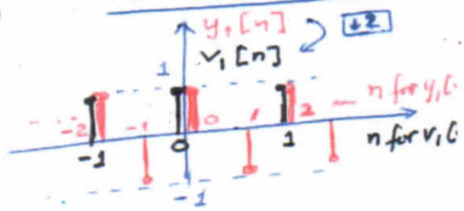


- Από την εκφώνηση:

$$h_0[n] = \frac{\delta[n] + \delta[n-1]}{2} \xrightarrow{DTFT} H_0(e^{j\omega}) = \frac{1+e^{-j\omega}}{2}$$

$$h_1[n] = (-1)^n \frac{\delta[n] + \delta[n-1]}{2} \xrightarrow{DTFT} H_1(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-j\omega}}{2}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $T = 1/2$:



ΣΥΝΕΠΩΣ:

- ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $T = 1$:

$$x[n] = \underset{e^{j0n}}{\overset{}{(1)^n}} \Rightarrow \begin{cases} y_0[n] = e^{j0n} \cdot \frac{1+e^{-j0}}{2} = 1 \\ y_1[n] = e^{j0n} \cdot \frac{1-e^{-j0}}{2} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\boxed{\downarrow 2}} \boxed{\begin{array}{l} v_0[n] = 1 \\ v_1[n] = 0 \end{array}}$$

- ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $T = 1/2$:

$$x[n] = \underset{e^{j\pi n}}{(-1)^n} \Rightarrow \begin{cases} y_0[n] = e^{j\pi n} \cdot \frac{1+e^{-j\pi}}{2} = 0 \\ y_1[n] = e^{j\pi n} \cdot \frac{1-e^{-j\pi}}{2} = (-1)^n \end{cases} \xrightarrow{\boxed{\downarrow 2}} \boxed{\begin{array}{l} v_0[n] = 0 \\ v_1[n] = 1 \end{array}}$$

(Βλέπε σχήμα)

2A

$$x_c(t)=\sin(10\pi t)+\cos(20\pi t) \quad \Big\downarrow \text{SAMPLING } (T) \quad x[n]=\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \Rightarrow T=?$$

Είναι μοναδική?

- Λόγω της δειγματοληψίας, $x[n]=x_c(nT)=\sin(10\pi nT)+\cos(20\pi nT)$
- Μια επιλογή που κάνει το σήμα αυτό ίσο με της εκφώνησης, είναι το:

$$10\pi nT=\frac{\pi n}{5} \ \ \& \ \ 20\pi nT=\frac{2\pi n}{5} \Longrightarrow \boxed{T=1/50=0.02\,s}$$

Η επιλογή αυτή ικανοποιεί το θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon, καθώς

$$\Omega_{max}=20\pi \Rightarrow T_{max}=\frac{2\pi}{20\pi\cdot 2}=\frac{1}{20}, \text{ άρα } T=\frac{1}{50}<T_{min}$$

- Ωστόσο η λύση αυτή δεν είναι μοναδική, λόγω της περιοδικότητας των $\sin(\cdot)$ & $\cos(\cdot)$. Στην πραγματικότητα, έχουμε $\boxed{\text{άπειρες λύσεις}}$ για το T, μία εκ των οποίων είναι η

$$\left.\begin{aligned}10\pi nT&=\frac{\pi n}{5}+2\pi n\\ 20\pi nT&=\frac{2\pi n}{5}+4\pi n\end{aligned}\right\} \Rightarrow T=11/50$$

Φυσικά η λύση δεν ικανοποιεί το θεώρημα του Shannon αφού $T=\frac{11}{50}>T_{min}$.

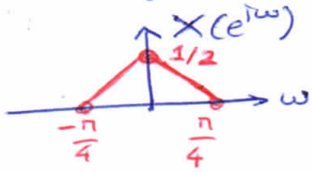
2B

$$x[n]=\left[\frac{2\sin(\frac{\pi n}{8})}{\pi n}\right]^2 \longrightarrow \boxed{\downarrow 4} \longrightarrow \boxed{\uparrow 4} \longrightarrow \boxed{\text{filter: } 1,\ -\pi/4 \ldots \pi/4} \longrightarrow y[n]=?$$

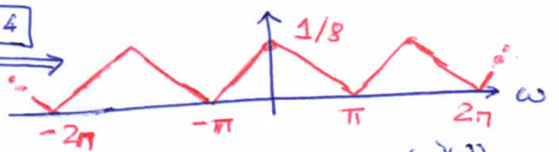
- Εργαζόμαστε στο πεδίο της συχνότητας.

όπου $\Pi(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|\le\frac{\pi}{8}\\ 0, & \frac{\pi}{8}<|\omega|\le\pi\end{cases}$

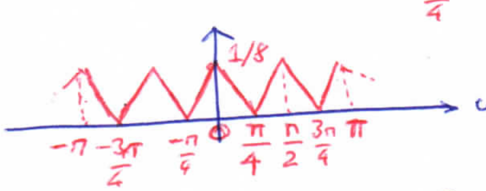
- $x[n]=4\cdot\frac{\sin(\frac{\pi n}{8})}{\pi n}\cdot\frac{\sin(\frac{\pi n}{8})}{\pi n} \Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{2}{\pi}\Pi(e^{j\omega})*\Pi(e^{j\omega})=$



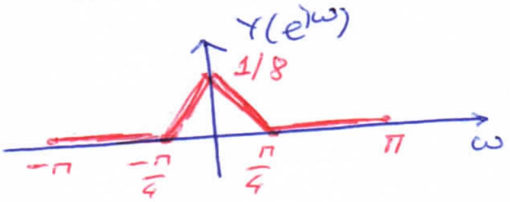
$\boxed{\downarrow 4} \Longrightarrow$



$\boxed{\uparrow 4} \Longrightarrow$



FILTERING $\Longrightarrow$



$$\Longrightarrow y[n]=\frac{1}{4}x[n]=\left[\frac{\sin(\pi n/8)}{\pi n}\right]^2$$

συγκρίνοντας με γράφημα του $X(e^{j\omega})$

3

ZEROS = $\{2, \pm 2j\}$

POLES = $\{1/2, \pm j/3\}$

$x[n] = (-1)^n \Rightarrow y[n] = 9(-1)^n$

(a) $H_d(z) = ?$

(b) DIRECT II & CASCADE IMPL.

(c) $H_c(z) = ?$ st $|X'(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$ (STABLE & CAUSAL)

(a) Από το διάγραμμα πόλων και μηδενικών του $H_d(z)$: $H_d(z) = A \cdot \dfrac{(1-2z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{9}z^{-2})}$ $\Rightarrow$

Παρατηρούμε ότι $(-1)^n = z_0^n \Big|_{z_0=-1}$, συνεπώς η έξοδος θα είναι $H(z_0)\cdot z_0^n$

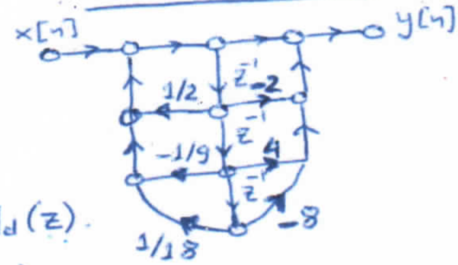
Από την εκφώνηση $x[n] = (-1)^n \Rightarrow y[n] = 9(-1)^n$, άρα $H(-1) = 9$

$$\Rightarrow 9 = A\frac{(1+2)(1+4)}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{9})} = \frac{A\cdot 3\cdot 5}{\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{9}} = 9A \Rightarrow \boxed{A=1}$$

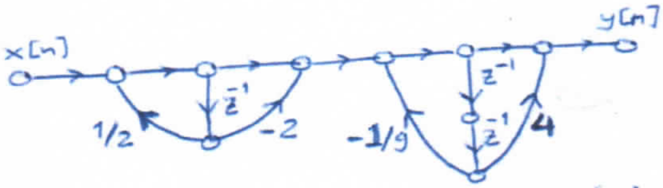
Άρα: $H_d(z) = \dfrac{(1-2z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{9}z^{-2})} \Rightarrow \boxed{H_d(z) = \dfrac{1-2z^{-1}+4z^{-2}-8z^{-3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}-\frac{1}{18}z^{-3}}}$

(b) ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ:

DIRECT FORM II:



CASCADE:



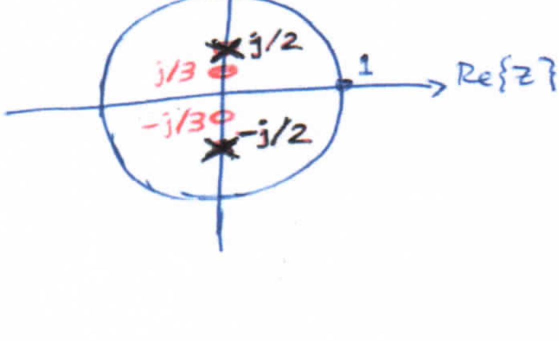
(c) Η πρώτη σκέψη ίσως να ήταν να θέσουμε $H_c(z) = 1/H_d(z)$. Το φίλτρο όμως δεν θα ήταν ευσταθές (πόλοι στο 2 & $\pm 2j$). Αντί αυτού, αναλύουμε το $H_d(z)$ σε γινόμενο MIN-PHASE & ALL-PASS, και αντιστρέφουμε το MIN-PHASE για να πάρουμε το ζητούμενο $H_c(z)$.

Άρα: $H_d(z) = \dfrac{(1-2z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{9}z^{-2})} = \underbrace{\dfrac{1+\frac{1}{4}z^{-2}}{1+\frac{1}{9}z^{-2}}\cdot 4\cdot 2}_{H_{d,MIN}(z)} \cdot \underbrace{\dfrac{1+4z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\cdot\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}_{H_{ALLPASS}(z),\ \text{με } |\cdot|=1}$

Άρα: $H_c(z) = \dfrac{1}{H_{d,MIN}(z)} = \boxed{\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1+\frac{1}{9}z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}}}$

ΠΟΛΟΙ της $H_c(z)$: $\{\pm j/2\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ της $H_c(z)$: $\{\pm j/3\}$



4

FIR – TYPE IV
ZERO @ $+1/2$
$M=3$
$x[n]=(-1)^n \Rightarrow y[n]=(-1)^n$

(a) $H(z)$, $h[n]$, ZPLANE-PLOT
$\Rightarrow$ (b) $\measuredangle H(e^{j\omega}) = ?$
(c) $|H(e^{j\omega})|$ για $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$
(d) IMPLEMENTATION DIAGRAM

- TYPE IV $\Rightarrow$ ZERO @ $+1$

  LIN. PHASE, ZERO @ $+1/2$ $\Rightarrow$ ZERO @ $+2$

  $M=3$

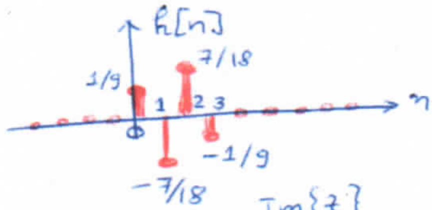
  $\Rightarrow$ ZEROs @ $\{1, \frac{1}{2}, 2\}$ $\Rightarrow$

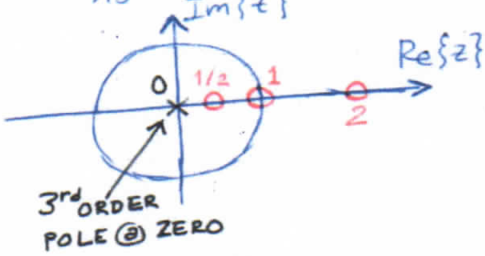
$$\Rightarrow H(z) = (1-z^{-1})(1-2z^{-1})(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})\cdot A =$$
$$= A(1-z^{-1})(1-\tfrac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}) = A(1-\tfrac{7}{2}z^{-1}+\tfrac{7}{2}z^{-2}-z^{-3})$$

$$x[n]=(-1)^n \Rightarrow y[n] = A(1+\tfrac{7}{2}+\tfrac{7}{2}+1)\cdot(-1)^n = 9A(-1)^n \underset{\text{από εκφώνηση}}{=} (-1)^n \Rightarrow \boxed{A=1/9}$$

z_0^n με $z_0=-1$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{1}{9} - \frac{7}{18}z^{-1} + \frac{7}{18}z^{-2} - \frac{1}{9}z^{-3}}$$





- ΦΑΣΗ ($\measuredangle H(e^{j\omega})$):

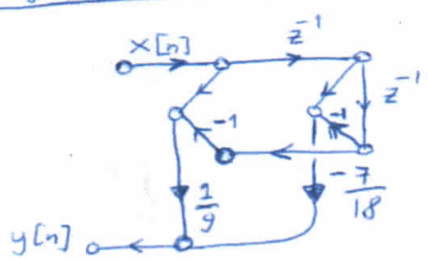
Λόγω αντισυμμετρίας γύρω από το $3/2$ $(=M/2)$ η φάση θα είναι $\boxed{\measuredangle H(e^{j\omega}) = -\frac{3}{2}\omega + \frac{\pi}{2} \ (+\pi)}$ → κατά διαστήματα

- $|H(e^{j\omega})| = ?$ @ $\omega = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$:

$$\omega = 0 \Rightarrow z=1 : H(e^{j0}) = H(z)\Big|_{z=1} = \frac{1}{9}-\frac{7}{18}+\frac{7}{18}-\frac{1}{9} = 0$$
$$\omega = \pi \Rightarrow z=-1 : H(e^{j\pi}) = H(z)\Big|_{z=-1} = \frac{1}{9}+\frac{7}{18}+\frac{7}{18}+\frac{1}{9} = 1$$
$$\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z=j : H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = H(z)\Big|_{z=j} = \frac{1}{9}+\frac{7}{18}j-\frac{7}{18}-\frac{1}{9}j = \frac{5}{18}(-1+j)$$
$$\Rightarrow |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \frac{5}{18}\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ δείχνει για υψιπερατό φίλτρο

- Διάγραμμα υλοποίησης:



(με 2 πολ/στές)

5 L.P. BUTTERWORTH

$N=2,\ \omega_c = 1/\sqrt{2}$

IMPULSE INVARIANCE

$\Longrightarrow$ $H(z) = ?$

IMPLEMENTATION DIAG.

- Το φίλτρο BUTTERWORTH, τάξης 2 έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H_c(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + s\sqrt{2}\,\Omega_c + \Omega_c^2} \qquad \left(\text{ρίζες } s_0 = \Omega_c e^{j\frac{3\pi}{4}},\ s_1 = \Omega_c e^{j\overset{-3\pi/4}{\overset{\shortparallel}{\frac{5\pi}{4}}}}\right)$$

- Λόγω μεθοδολογίας σχεδιασμού (IMPULSE INVARIANCE, $T=1$):

$$\Omega_c = \omega_c = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{H_c(s) = \frac{1/2}{s^2 + s + 1/2}}$$

- Ακολουθούμε τη μεθοδολογία ($\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow$ IMPULSE INVARIANCE $\Rightarrow \mathcal{Z}$) για να βρούμε το $H(z)$:

$$H_c(s) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h_c(t) = e^{-1/2t}\sin\left(\frac{t}{2}\right)u(t) \xrightarrow[\text{INVARIANCE }(T=1)]{\text{IMPULSE}}$$

$$\rightarrow h[n] = e^{-\frac{1}{2}n}\sin\left(\frac{n}{2}\right)u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) = \frac{\left[e^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right]z^{-1}}{1 - \left[2e^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{1}{2}\right)\right]z^{-1} + \left[e^{-1}\right]z^{-2}}$$

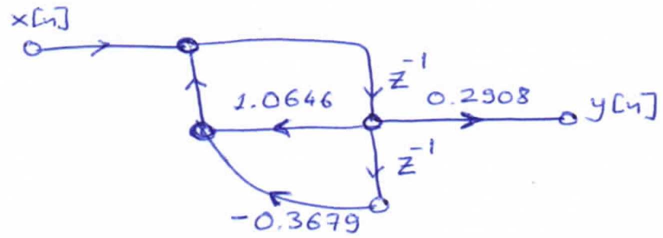
$$\Longrightarrow \boxed{H(z) = \frac{0.2908 \cdot z^{-1}}{1 - 1.0646 \cdot z^{-1} + 0.3679 \cdot z^{-2}}}$$

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ (ΥΠΑΡΧΕΙ ALIASING):

$\omega = 0 \rightarrow z = 1 \rightarrow H(z)\big|_{z=1} = 0.959$

$\omega = \pi \rightarrow z = -1 \rightarrow H(z)\big|_{z=-1} = 0.120$

- ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ (DIRECT FORM II)



6 HIGH PASS BUTTERWORTH

$N=2$, $\omega_p = \frac{\pi}{2}$ @ 3dB LOSS

BILINEAR TRANSFORM METHOD

$\Bigg\} \Rightarrow H(z) = ?$

ZPLANE-PLOT

- Το αναλογικό BUTTERWORTH έχει (για N=2):

$$H_c^{(2)}(s) = \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\Omega_c s + \Omega_c^2} \qquad (1)$$

- Σχεδιάζουμε πρώτα το κατωπερατό φίλτρο με $\theta_c = \pi/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Omega_c = 2\tan\left(\frac{\theta_c}{2}\right) = 2\cancel{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{1} = 2 \qquad (2)$$

- Από (1)&(2) $\Rightarrow H_c^{(2)}(s) = \dfrac{4}{s^2 + \sqrt{2}\cdot 2\cdot s + 4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow H_{LP}^{(2)}(z) = H_c^{(2)}(s)\Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + \cancel{4}\sqrt{2}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + \cancel{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{LP}^{(2)}(Z) = \frac{(1+Z^{-1})^2}{(1-Z^{-1})^2 + \sqrt{2}\,(1-Z^{-2}) + (1+Z^{-1})^2} = \frac{(1+Z^{-1})^2}{(2+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2})Z^{-2}} \qquad (3)$$

- Από το τυπολόγιο, ο Μ/Σ από L.P. σε H.P γίνεται με τον τύπο

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}, \quad \text{όπου} \quad \alpha = -\frac{\cos[(\theta_c+\omega_p)/2]}{\cos[(\theta_c-\omega_p)/2]} = \frac{-\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{\,0}}{\cancel{\cos 0}_{\,1}} = 0$$

άρα $Z^{-1} = -z^{-1}$ (4)

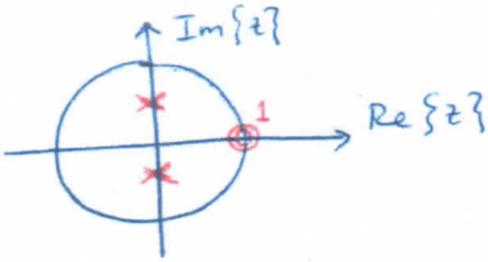
- Συνεπώς, από (3)&(4):

$$H_{HP}^{(2)}(z) = H_{LP}^{(2)}(Z)\Big|_{Z^{-1}=-z^{-1}} = \boxed{\frac{(1-z^{-1})^2}{(2+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2})z^{-2}}} \qquad (5)$$

- Επιβεβαιώνουμε από (5) ότι $H_{HP}(z)\Big|_{z=1} = 0$ & $H_{HP}(z)\Big|_{z=-1} = \dfrac{4}{2+\cancel{\sqrt{2}}+2-\cancel{\sqrt{2}}} = 1$

- ZEROS: $\{+1, +1\}$

POLES: $\left\{ \pm\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}\cdot j \right\}$



7 L.P IIR BUTTERWORTH $N=5$, $\omega_c = \frac{\pi}{2}$
BILINEAR TRANSFORM

A CASCADE IMPL.

- Οι ρίζες του πολ. Butterworth δίνονται από: $s_n = \Omega_c \exp\left(j\pi \frac{2n+6}{10}\right)$, και βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Για

$$n=0,4: \quad s_{0,4} = \Omega_c e^{\pm j\frac{6\pi}{10}}$$
$$n=1,3: \quad s_{1,3} = \Omega_c e^{\pm j\frac{8\pi}{10}}$$
$$n=2: \quad s_2 = -\Omega_c$$

- Λόγω διγραμμικού Μ/Σ, $\Omega_c = 2\tan(\omega_c/2) = 2\tan(\pi/4) = 2$

- Άρα
$$H_c(s) = \frac{2^5}{(s+2)(s-2e^{j\frac{6\pi}{10}})(s-2e^{-j\frac{6\pi}{10}})(s-2e^{j\frac{8\pi}{10}})(s-2e^{-j\frac{8\pi}{10}})} =$$
$$= \frac{2^5}{(s+2)(s^2-4\cos(0.6\pi)s+4)(s^2-4\cos(0.8\pi)s+4)}$$

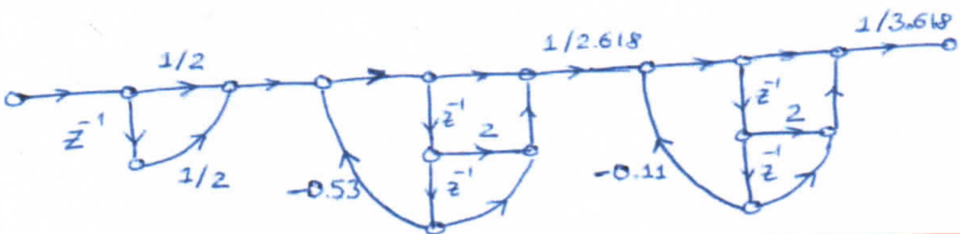
$$\xrightarrow[\text{Μ/Σ}]{\text{ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΟΣ}} H(z) = H_c(s)\Big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{1+z^{-1}}} = \frac{(1+z^{-1})^5}{(1-z^{-1}+1+z^{-1})((1-z^{-1})^2-2\cos(0.6\pi)(1-z^{-1})(1+z^{-1})+(1+z^{-1})^2)\cdot((1-z^{-1})^2-2\cos(0.8\pi)(1-z^{-1})(1+z^{-1})+(1+z^{-1})^2)}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{(1+z^{-1})^5}{2((1-z^{-1})^2+(1+z^{-1})^2+0.618(1-z^{-2}))\cdot((1-z^{-1})^2+(1+z^{-1})^2+1.618(1-z^{-2}))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{(1+z^{-1})^5}{2(2.618+1.382z^{-2})(3.618+0.382z^{-2})} =$$

$$= \frac{(1+z^{-1})}{2}\cdot\frac{(1+z^{-1})^2}{2.618(1+0.5279z^{-2})}\cdot\frac{(1+z^{-1})^2}{3.618(1+0.1056z^{-2})}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ ΣΕΙΡΑ:

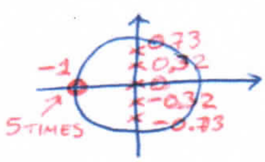


B POLES/ZEROS

ZEROS: $\{-1,-1,-1,-1,-1\}$

POLES: $\{\pm\sqrt{0.5279}\,j, \pm\sqrt{0.1056}\,j, 0\}$

$\sqrt{0.5279} = 0.7265$, $\sqrt{0.1056} = 0.3249$



C $x[n] = 1, (-1)^n \Rightarrow y[n] = ?$

$x[n] = 1 = 1^n \Rightarrow y[n] = H(1)\cdot 1^n = 1$, όπου $H(1) = 2^5/(2\cdot 4\cdot 4) = 1$

$x[n] = (-1)^n \Rightarrow y[n] = H(-1)(-1)^n = 0$, όπου $H(-1) = 0$

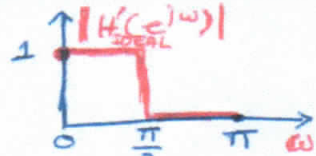
8 FIR LIN-PHASE LowPass Filter for $\boxed{\uparrow 2}$.

$$\left.\begin{array}{l} 1.5 < |H(e^{j\omega})| < 2.5, \text{ για } |\omega| \approx 0 \\ |H(e^{j\omega})| < 0.2 \text{ για } |\omega| \approx \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} H(z) = ? \\ \text{POLYPHASE-IMPL.} \end{array}$$

- Σχεδιάζουμε πρώτα το φίλτρο με κέρδος 1, άρα (με $H(e^{j\omega}) = 2H'(e^{j\omega})$):

$$\left.\begin{array}{l} 0.75 < |H'(e^{j\omega})| < 1.25 \text{ για } |\omega| \approx 0 \\ |H'(e^{j\omega})| < 0.10 \text{ για } |\omega| \approx \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \delta = \min\{0.25, 0.1\} = 0.1$$

- Συνεπώς $-20\log_{10}\delta = -20\log_{10}10^{-1} = 20\,dB$, που επιτυγχάνεται με το ορθογώνιο αλλά και το Hamming παράθυρο. Το πρώτο είναι προτιμητέο γιατί θα δώσει μικρότερο M, άρα διαλέγουμε $\boxed{\text{ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΘΥΡΟ}}$.



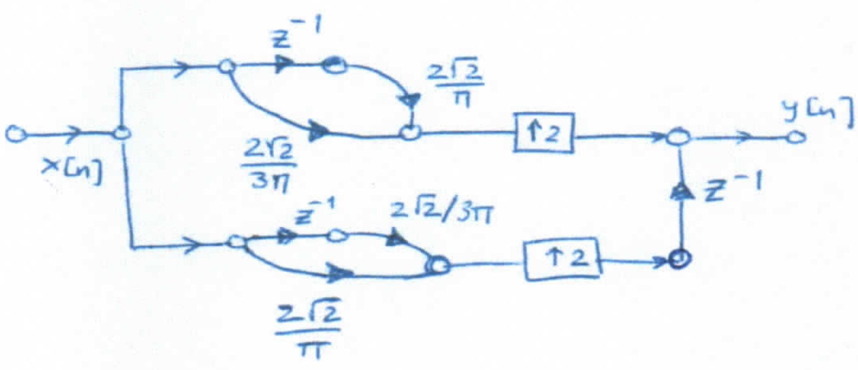
- Άρα, με $\Delta\omega = \pi - 0 = \pi = \dfrac{4\pi}{M+1} \Longrightarrow \boxed{M = 3}$

- Συνεπώς:
$\left(\dfrac{\pi + 0}{2} = \dfrac{\pi}{2} = \omega_c\right)$

$$h[n] = \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}(n - \frac{3}{2})}{\pi(n - \frac{3}{2})}, & n = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} z^{-1} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} z^{-2} + \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} z^{-3}}$$

- ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΠΟΛΥΦΑΣΙΚΗΣ ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗΣ:



(γιατί $H(z) = E_0(z^2) + E_1(z^2) z^{-1}$ με:

$$e_0[n] = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\delta[n] + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\delta[n-1]$$

$$e_1[n] = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\delta[n] + \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\delta[n-1]$$
)

9 FIR LP FILTER

ORTHOGONAL WINDOW

$M=5,\ \omega_c=\pi/3,\ G=1$

A) $H(z)=?$

- $$h_{LP}[n] = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{3}\left(n-\frac{5}{2}\right)\right]}{\pi\left(n-\frac{5}{2}\right)}$$ (για $n=0,1,\dots,5$)

$n=0$: $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)/(-5\pi/2) = \frac{-1/2}{-5\pi/2} = \frac{1}{5\pi}$

$n=1$: $\sin\left(\frac{\pi}{3}\left(\frac{-3}{2}\right)\right)/(-3\pi/2) = \frac{-1}{-3\pi/2} = \frac{2}{3\pi}$

$n=2$: $\sin\left(\frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)/(-\pi/2) = \frac{-1/2}{-\pi/2} = \frac{1}{\pi}$

$n=3,4,5$ προκύπτουν λόγω συμμετρίας

- Άρα $$H(z)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\frac{2}{3}z^{-4}+\frac{1}{5}z^{-5}\right)$$

B) ΦΑΣΗ, ΚΑΘ. ΟΜΑΔΑΣ, ΕΞΟΔΟΣ ΣΕ $(-1)^n$

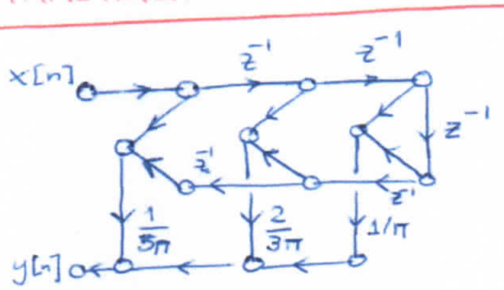
- $\mathrm{Arg}\{H(e^{j\omega})\} = -\omega\frac{5}{2}\ (+\pi)$ ← κατά διαστήματα

- $\tau(\omega) = 5/2$

- $x[n]=(-1)^n \Rightarrow y[n]=H(-1)\cdot(-1)^n = 0$

$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)=0$

E) SYMMETRICAL IMPLEMENTATION



D) POLYPHASE & RATE EXP. ↑3

- $$H(z)=\sum_{k=0}^{2}E_k(z^3)z^{-k}$$

με $e_0[n]=\frac{1}{5\pi}\delta[n]+\frac{1}{\pi}\delta[n-1]$

$e_1[n]=\frac{2}{3\pi}\delta[n]+\frac{2}{3\pi}\delta[n-1]$

$e_2[n]=\frac{1}{\pi}\delta[n]+\frac{1}{5\pi}\delta[n-1]$