ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ 2ΗΣ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1.

a. $\int_{-2}^{1} \cos(\pi t) \cdot \delta(t-3)\, dt = 0,$

γιατί το ολοκλήρωμα είναι από -2 εως 1, δηλ. δεν υπάρχει t=3 όπου το δ(t-3) θα έδινε μη μηδενικό αποτέλεσμα στο ολοκλήρωμα.

b. $\int_{1}^{7} \cos(\pi t) \cdot \delta(t-3)\, dt = \cos(3\pi) = -1,$

γιατί το ολοκλήρωμα είναι από 1 εως 7, δηλ. υπάρχει t=3

c. $\int_{-\infty}^{0} \cos(\pi\, t/2) \cdot \delta(t+13)\, dt = \cos\left(\frac{-13\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{2}\right),$

γιατί η cos είναι άρτια δηλ. $\cos(-x) = \cos(x)$ και συνιμήτονο περιττού πολλαπλάσιου της π/2 είναι 0. Τέλος ίσχυει ότι και στο b.

2. Να βρείτε εάν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, αιτιατά.

a. $y(t) = \sqrt{x(t)}$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) => y(t) = \sqrt{x_1(t) + x_2(t)} \neq y_1(t) + y_2(t) = \sqrt{x_1(t)} + \sqrt{x_2(t)}$

Άρα είναι μη γραμμικό.

Για $x(t) = x(t-t_0)$ έχουμε έξοδο $y(t) = \sqrt{x(t-t_0)}$

Για $t = t - t_0$ έχουμε $y(t-t_0) = \sqrt{x(t-t_0)}$

Άρα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Η έξοδος $y(t) = \sqrt{x(t)}$ δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου, άρα είναι αιτιατό.

b. $y(t) = 3x(t) - 9$

(*) $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \Rightarrow y(t) = 3a_1 x_1(t) + 3a_2 x_2(t) - 9$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) = 3a_1 x_1(t) - 9a_1 + 3a_2 x_2(t) - 9a_2 \end{array} \right\} \text{ΜΗ γραμμικ}$$

$$\left. \begin{array}{l} (*) \quad y(t-t_0) = 3x(t-t_0) - 9 \\ \text{για } t \Rightarrow t-t_0 \quad y(t) = 3x(t-t_0) - 9 \end{array} \right\} \text{Χρ. Αμετάβλητο}$$

(*) $y(t)$ εξαρτ. από $x(t)$ μόνο, όχι μελλοντικό $t \Rightarrow$ Αιτιατό

c. $y(t) = x(t)x(t-2)$

(*) $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \Rightarrow$

$$y(t) = (a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t))(a_1 x_1(t-2) + a_2 x_2(t-2))$$

$$= a_1^2 x_1(t) x_1(t-2) + a_1 a_2 x_1(t) x_2(t-2) + a_2 a_1 x_2(t) x_1(t-2)$$

$$+ a_2^2 x_2(t) x_2(t-2) \neq a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

όπου $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) = a_1 x_1(t) x_1(t-2) + a_2 x_2(t) x_2(t-2)$

άρα είναι ΜΗ Γραμμικό

(*) για $x(t) \Rightarrow x(t-t_0)$ έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} y(t) = x(t-t_0) \cdot x(t-t_0-2) \\ \text{για } t \Rightarrow t-t_0 \text{ έχουμε:} \\ y(t-t_0) = x(t-t_0) \cdot x(t-t_0-2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{είναι ίσα άρα είναι} \\ \text{χρονικά αμετάβλητο} \end{array}$$

(*) $y(t) = x(t) \cdot x(t-2)$

Η έξοδος εξαρτάται από την τιμή της εισόδου τώρα $(x(t))$ και στο παρελθόν $(x(t-2))$ άρα το σύστημα είναι αιτιατό.

d. $y(t) = tx(t)$

* $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \Rightarrow y(t) = a_1 t x_1(t) + a_2 t x_2(t)$
$= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$

$\Rightarrow$ είναι γραμμικό

* για $x(t) \rightarrow x(t-t_0)$ έχουμε έξοδο:

$y(t) = t\, x(t-t_0)$

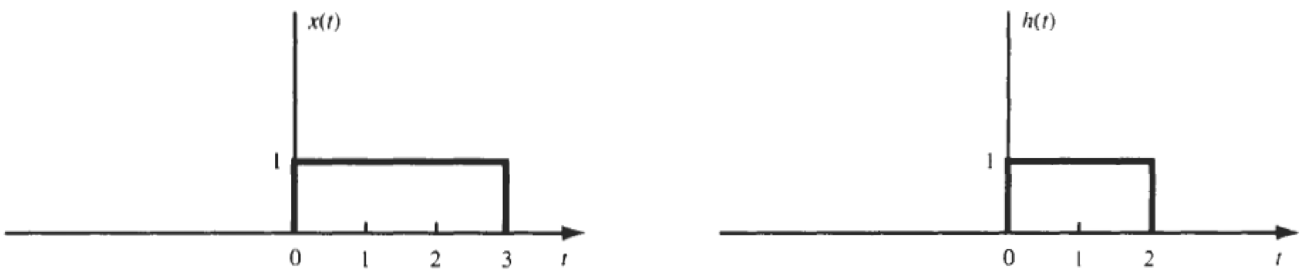
για $t \rightarrow t-t_0$ έχουμε:

$y(t-t_0) = (t-t_0) \cdot x(t-t_0)$

Δεν είναι ίσα άρα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο

* η έξοδος $y(t) = t\,x(t)$ δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου, άρα το σύστημα είναι αιτιατό

3.



Εικόνα 1

Αρχικά εκφράζουμε τα σήματα με μορφή συνάρτησης.

$x(t) = u(t) - u(t-3) \qquad h(t) = u(t) - u(t-2)$

Στη συνέχεια, και με βάση τον ορισμό, έχουμε:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau-3)][u(t-\tau) - u(t-\tau-2)]\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)\, d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-2-\tau)\, d\tau$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-2-\tau)\, d\tau$$

Since

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & 0<\tau<t,\ t>0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u(\tau)u(t-2-\tau) = \begin{cases} 1 & 0<\tau<t-2,\ t>2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u(\tau-3)u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & 3<\tau<t,\ t>3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u(\tau-3)u(t-2-\tau) = \begin{cases} 1 & 3<\tau<t-2,\ t>5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

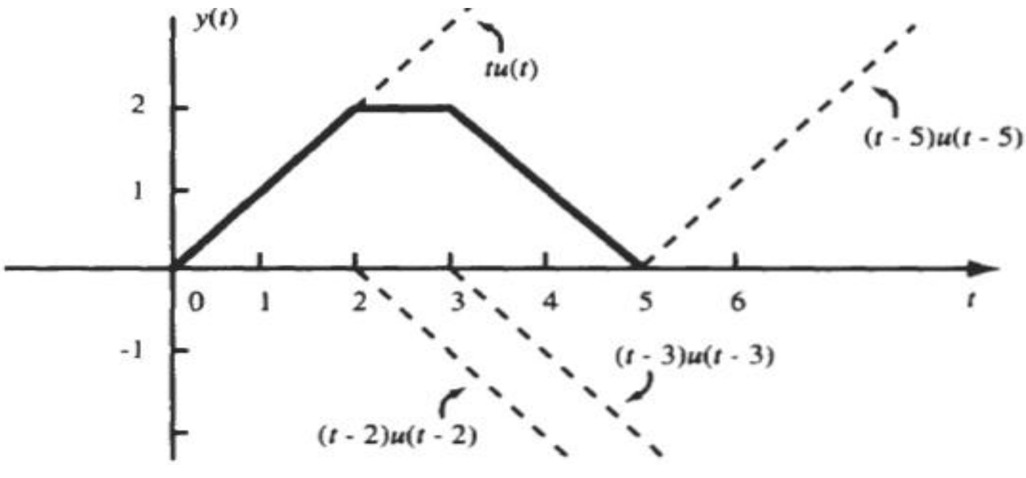
Επομένως μπορούμε να εκφράσουμε το y(t) ως εξής:

$$y(t) = \left(\int_0^t d\tau\right)u(t) - \left(\int_0^{t-2} d\tau\right)u(t-2)$$

$$- \left(\int_3^t d\tau\right)u(t-3) + \left(\int_3^{t-2} d\tau\right)u(t-5)$$

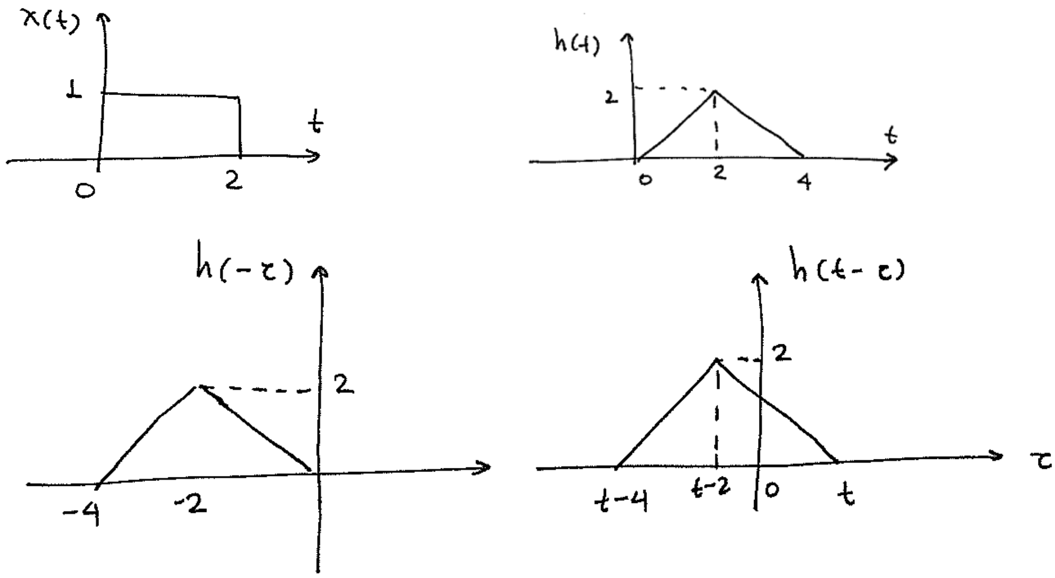
$$= tu(t) - (t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3) + (t-5)u(t-5)$$

Το οποίο φαίνεται στην εικόνα 2.



Εικόνα 2

4.



Το $h(t-\tau)$ είναι το $h(\tau)$ καθρεφτισμένο.

Έτσι για $t-4 \leq \tau \leq t-2$ έχουμε το καθρεφτισμένο $h(\tau') = 4-\tau'$ όπου $\tau' = t-\tau$. Άρα:

$h(t-\tau) = 4-t+\tau$ για $t-4 \leq \tau \leq t-2$.

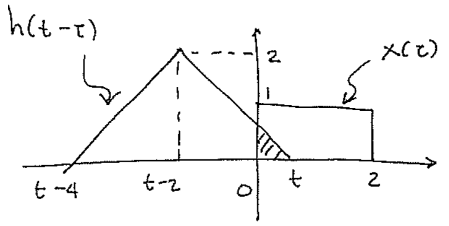
Για $t-2 \leq \tau \leq t$ έχουμε το $h(\tau') = \tau'$ καθρεφτισμένο, άρα

$h(t-\tau) = t-\tau$ για $t-2 \leq \tau \leq t$.

$$h(t-\tau) = \begin{cases} 4-t+\tau & \text{για } t-4 \leq \tau \leq t-2 \\ t-\tau & \text{" } t-2 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Αρχίζει να υπάρχει επικάλυψη των $h(t-\tau)$ και $x(\tau)$ όταν το δεξί άκρο του $h(t-\tau)$ πέσει πάνω από το αριστερό άκρο του $x(\tau)$.

Για $t \leq 0 \Rightarrow y(t) = 0$



Υπάρχει επικάλυψη για $0 \leq \tau \leq t$

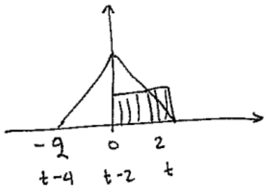
όταν $\left.\begin{matrix} t \geq 0 \\ t \leq 2 \end{matrix}\right\} \; 0 \leq t \leq 2$

μόνο του δεξιού μέρους του $h(t-\tau)$.

Το δεξί μέρος "τελειώνει" όταν $t-2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2$.

δηλ. έχει καλύψει όλο το $x(\tau)$

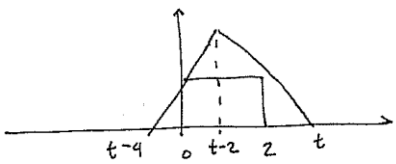
$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)\,d\tau = t\int_0^t d\tau - \int_0^t \tau\,d\tau = t^2 - \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2}$$



Οριακά για $t=2$ όλο το δεξί μέρος της $h(t-\tau)$ έχει καλύψει όλο το $x(\tau)$.

Για $t \geq 2$ θα καλύπτεται το $x(\tau)$ και από το αριστερό μέρος της $h(t-\tau)$.
Έχουμε $t \geq 2$, $t-4 \leq 0 \Rightarrow 2 \leq t \leq 4$.

~~Για~~



Για $0 \leq \tau \leq t-2$ υπάρχει επικάλυψη μεταξύ του $x(\tau)$ και του αριστερού μέρους της $h(t-\tau)$.

Για $t-2 \leq \tau \leq 2$, το δεξί μέρος της $h(t-\tau)$ καλύπτει το $x(\tau)$.

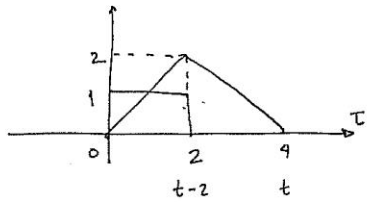
Αυτά πρέπει να τα προσθέσουμε στα ολοκληρώματα:

$$y(t) = \int_0^{t-2} (4-t+\tau)\,d\tau + \int_{t-2}^{2} (t-\tau)\,d\tau = (t-2)(4-t) + \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^{t-2}$$

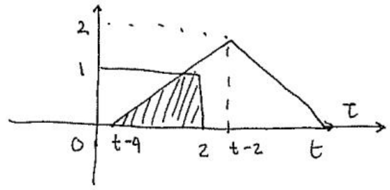
$$+ t(4-t) - \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{t-2}^{2} = 4t - t^2 - 8 + 2t + \frac{(t-2)^2}{2}$$

$$+ 4t - t^2 - 2 + \frac{(t-2)^2}{2} = -2t^2 + 10t - 10 + t^2 + 4 - 4t$$

$$= -t^2 + 6t - 6$$



Οριακό για $t=4$ όλο το αριστερό μέρος της $h(t-\tau)$ επικαλύπτει ολόκληρο το $x(\tau)$



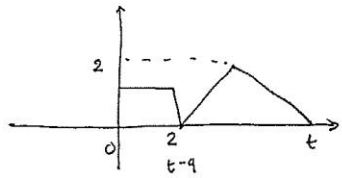
$t-4 \geq 0 \Rightarrow t \geq 4$
$t-4 \leq 2 \Rightarrow t \leq 6$ $\Big\}$ $4 \leq t \leq 6$

Εδώ το αριστερό μέρος της $h(t-\tau)$ θα καλύπτει μέρος της $x(\tau)$, για τ:
$t-4 \leq \tau \leq 2$

$$y(t) = \int_{t-4}^{2} (4-t+\tau)\, d\tau = 4\int_{t-4}^{2} d\tau - \int_{t-4}^{2} t\, d\tau + \int_{t-4}^{2} \tau\, d\tau =$$

$$4(2-t+4) - t(2-t+4) + \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_{t-4}^{2} = 4(6-t) - t(6-t) + 2 - \frac{(t-4)^2}{2} =$$

$$24 - \cancel{4t} - 6t + t^2 + 2 - \frac{t^2}{2} - 8 + \cancel{4t} = \frac{t^2}{2} - 6t + 18$$



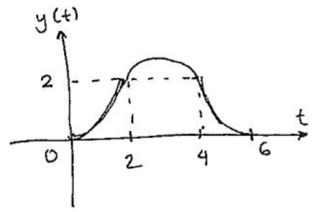
Για $t-4 \geq 2 \Rightarrow$

$t \geq 6$ δεν υπάρχει επικάλυψη

Άρα $y(t) = 0$

Τελικά:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t^2/2 & 0 < t \leq 2 \\ -t^2 + 6t - 6 & 2 < t \leq 4 \\ \frac{t^2}{2} - 6t + 18 & 4 < t \leq 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$



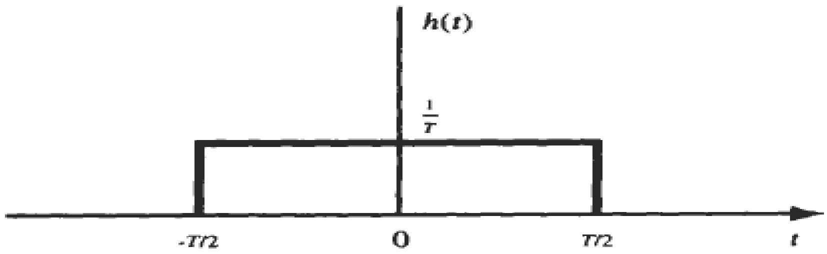
5. $y(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)d\tau$ => $y(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{t+T/2} x(\tau)d\tau - \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{t-T/2} x(\tau)d\tau$

=> $y(t) = \frac{1}{T} \cdot x(t) * u\left(t + \frac{T}{2}\right) - \frac{1}{T} \cdot x(t) * u\left(t - \frac{T}{2}\right)$

=> $x(t) * \frac{1}{T} \cdot \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] = x(t) * h(t)$

Άρα έχουμε ότι:

$$h(t) = \frac{1}{T} \cdot \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] = \begin{cases} 1/T & , -T/2 < t \leq T/2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



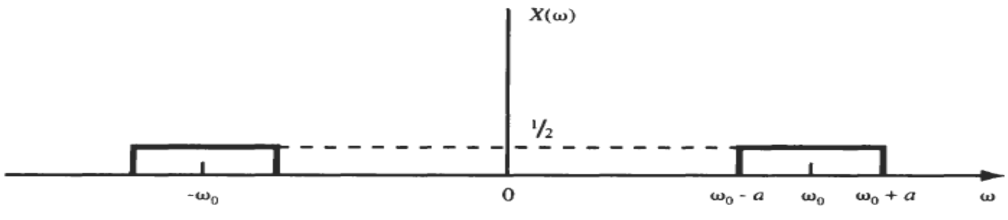
Είναι φανερό ότι $h(t) \neq 0$ για t<0, άρα το σύστημα είναι μη αιτιατό.

6. a. $p_a(t) \leftrightarrow 2\frac{\sin \omega a}{\omega}$

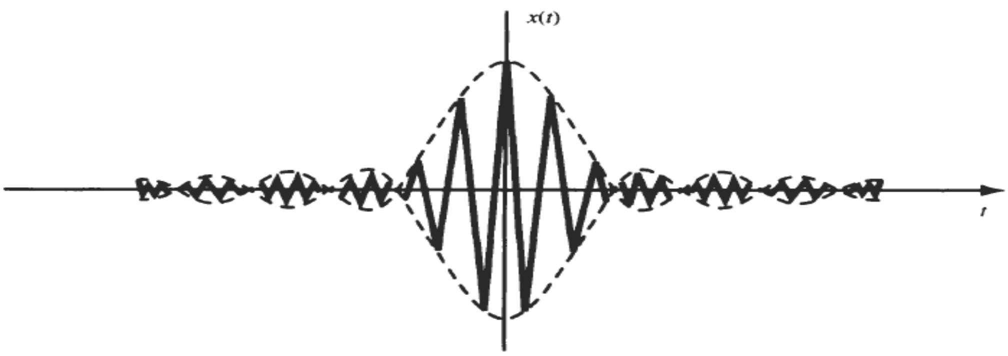
b. $x(t)\cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)$

Από a και b προκύπτει ότι:

$$x(t) = \frac{\sin at}{\pi t} \cos \omega_0 t$$



(a)



(b)

7.

② a) $x(t) = e^{at}\cos(\Omega_1 t)\,u(t) + e^{-\beta t}\sin(\Omega_2 t)\,u(-t)$

<u>Ιδιότητες που χρειάζονται:</u>

$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{a+j\Omega}$

$x(t)e^{j\Omega_0 t} \longleftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$

$x(-t) \longleftrightarrow X(-\Omega)$

- $e^{at}u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{-a+j\Omega}$

- $\left(e^{at}u(t)\right)\cdot\cos(\Omega_1 t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{at}u(t)\right)e^{j\Omega_1 t} + \dfrac{1}{2}\left(e^{at}u(t)\right)e^{-j\Omega_1 t}$

$\longleftrightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{-a+j(\Omega-\Omega_1)} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{-a+j(\Omega+\Omega_1)}$

- $e^{-\beta t}\sin(\Omega_2 t)\,u(-t)$:

Θέτω $y(t) = e^{-\beta t}\sin(\Omega_2 t)\,u(-t)$ και $z(t) = y(-t) \Rightarrow$

$z(t) = e^{\beta t}\sin(-\Omega_2 t)\,u(t) = -e^{\beta t}\sin(\Omega_2 t)\,u(t)$

- $e^{\beta t}u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{-\beta+j\Omega}$

$$\bullet\ \left(e^{\beta t}u(t)\right)\cdot \sin(\Omega_2 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{\beta t}u(t)\right)e^{j\Omega_2 t} - \frac{1}{2j}\left(e^{\beta t}u(t)\right)e^{-j\Omega_2 t}$$

$$\longleftrightarrow \frac{1}{2j}\frac{1}{-\beta+j(\Omega-\Omega_2)} - \frac{1}{2j}\frac{1}{-\beta+j(\Omega+\Omega_2)}$$

$$Z(\Omega) = -\frac{1}{2j}\frac{1}{-\beta+j(\Omega-\Omega_2)} + \frac{1}{2j}\frac{1}{-\beta+j(\Omega+\Omega_2)}$$

άρα $Y(\Omega) = Z(-\Omega)$:

$$Y(\Omega) = -\frac{1}{2j}\frac{1}{-\beta+j(-\Omega-\Omega_2)} + \frac{1}{2j}\frac{1}{-\beta+j(-\Omega+\Omega_2)}$$

$$= \frac{1}{2j}\frac{1}{\beta+j(\Omega+\Omega_2)} - \frac{1}{2j}\frac{1}{\beta+j(\Omega-\Omega_2)}$$

Τελικά

$$X(\Omega) = \frac{1}{2}\frac{1}{-a+j(\Omega-\Omega_1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{-a+j(\Omega+\Omega_1)}$$

$$+ \frac{1}{2j}\frac{1}{\beta+j(\Omega+\Omega_2)} - \frac{1}{2j}\frac{1}{\beta+j(\Omega-\Omega_2)}$$

β) $e^{-|t|}\cos(2t)$

Έχουμε $e^{-|t|} = e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)$

$x_1(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{1+j\Omega}$

$x_2(t) = e^{t}u(-t) = x_1(-t)$ άρα $X_2(\Omega) = X_1(-\Omega)$ και $X_2(\Omega) = \dfrac{1}{1-j\Omega}$

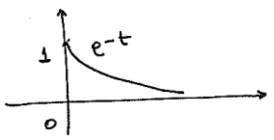
άρα $e^{-|t|} \longleftrightarrow \dfrac{1}{1+j\Omega} + \dfrac{1}{1-j\Omega} = \dfrac{2}{1+\Omega^2}$

$e^{-|t|}\cos(2t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-|t|}e^{j2t}$

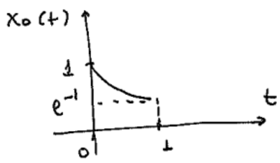
όμως $x(t)e^{j\Omega_0 t} \longleftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$ άρα

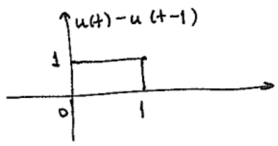
$e^{-|t|}\cos(2t) \longleftrightarrow \dfrac{1}{1+(\Omega-2)^2} + \dfrac{1}{1+(\Omega+2)^2}$

γ) $x_0(t) = e^{-t}\left(u(t)-u(t-1)\right)$



$\Rightarrow$





$$X_0(j\Omega) = \int_0^1 e^{-t}e^{-j\Omega t}\,dt = \int_0^1 e^{-(1+j\Omega)t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{1+j\Omega}\left[e^{-(1+j\Omega)t}\right]_0^1 = -\frac{1}{1+j\Omega}\left(e^{-(1+j\Omega)}-1\right)$$

$$= \frac{1}{1+j\Omega}\left(1-e^{-(1+j\Omega)}\right)$$

$$t\,x_0(t) \longleftrightarrow j\,\frac{d X_0(\Omega)}{d\Omega}$$

$$\frac{d}{d\Omega}\left(X_0(\Omega)\right) = -\frac{j}{(1+j\Omega)^2}\left(1-e^{-(1+j\Omega)}\right) + \frac{1}{1+j\Omega}\cdot j\,e^{-(1+j\Omega)}$$

$$= \frac{j}{(1+j\Omega)^2}\left(e^{-(1+j\Omega)} - 1 + (1+j\Omega)e^{-(1+j\Omega)}\right)$$

$$= \frac{j}{(1+j\Omega)^2}\left(e^{-(1+j\Omega)} - 1 + e^{-(1+j\Omega)} + j\Omega e^{-(1+j\Omega)}\right)$$

$$= \frac{j}{(1+j\Omega)^2}\left(j\Omega e^{-(1+j\Omega)} + 2e^{-(1+j\Omega)} - 1\right)$$

άρα $\quad t\,x(t) \leftrightarrow j\,\dfrac{d X_0(\Omega)}{d\Omega} = \qquad \langle j^2=-1\rangle$

$$= \frac{1}{(1+j\Omega)^2}\left(1 - j\Omega e^{-(1+j\Omega)} - 2e^{-(1+j\Omega)}\right)$$