

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

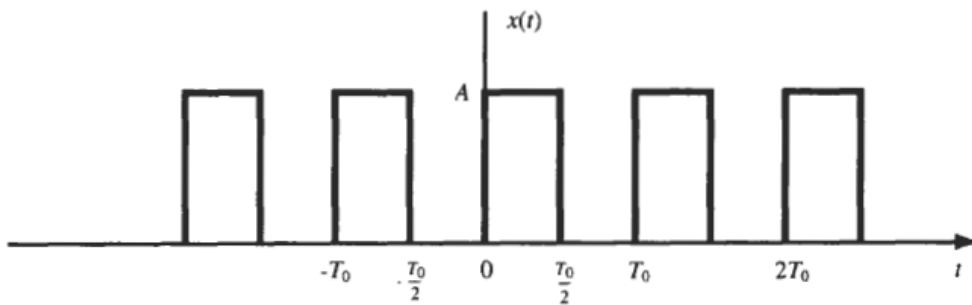
4^Η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Καθορίστε τη μιγαδική εκθετική σειρά Fourier για καθένα από τα παρακάτω σήματα:

- $x(t) = \cos \omega_0 t$
- $x(t) = \sin \omega_0 t$
- $x(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$
- $x(t) = \cos 4t + \sin 6t$
- $x(t) = \sin^2 t$

2. Θεωρήστε την περιοδική τετραγωνική κυματομορφή της εικόνας 1.

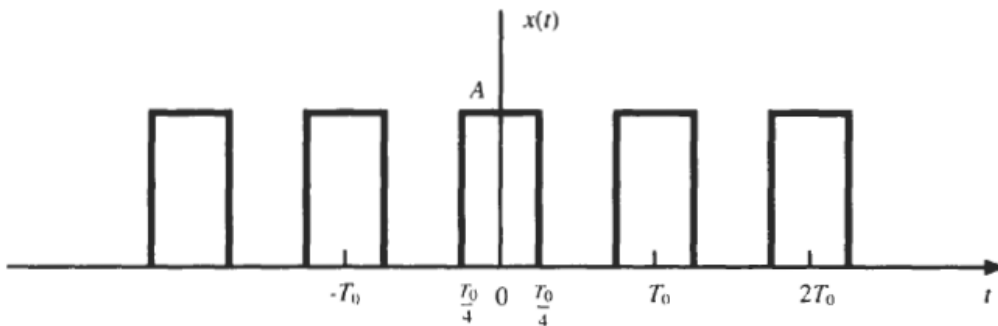
- Καθορίστε τη μιγαδική εκθετική σειρά Fourier του $x(t)$.
- Καθορίστε την τριγωνική σειρά Fourier του $x(t)$.



Εικόνα 1

3. Θεωρήστε την περιοδική τετραγωνική κυματομορφή της εικόνας 2.

- Καθορίστε τη μιγαδική εκθετική σειρά Fourier του $x(t)$.
- Καθορίστε την τριγωνική σειρά Fourier του $x(t)$.



Εικόνα 2

- 4.
- Να υπολογίσετε τους συντελεστές της σειράς Fourier για περιοδικό σήμα $x(t) = 2t - 1, 0 < t < 1$ με περίοδο $T=1$.
 - Με βάση το θεώρημα Parseval και το ερώτημα α), να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
 - Να βρείτε τους συντελεστές του σφάλματος προσέγγισης με $2n+1$ δείγματα της σειράς Fourier $e_n(t) = x(t) - \sum_{k=-n}^n a_k e^{-j(2\pi/T)kt}$. (Hint: να βασιστείτε στα διαφορετικά όρια του αθροίσματος του πραγματικού $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-j(2\pi/T)kt}$ και της προσέγγισής του)
 - Να υπολογίσετε την ενέργεια του $e_n(t)$ για $n=1, 5, 10$.
 - Να δείξετε ότι η ενέργεια του σφάλματος προσέγγισης τείνει στο μηδέν όταν το n πάει στο άπειρο. (Hint: να βασιστείτε στο ερώτημα γ)
5. Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της Gaussian συνάρτησης $f(t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-t^2/2\sigma^2}$ είναι επίσης Gaussian: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\Omega^2\sigma^2/2}$.
(Hint: Δίνεται ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$)
6. Είναι χρονικά αμετάβλητα τα:
- $y[n] = x[n - 1] + x[n + 1]$
 - $y[n] = a^n x[n - 1] + x[n + 1]$
7. Ένας κοινός τελεστής που χρησιμοποιείται συχνά είναι η «Πρώτη Διαφορά»:
- $$y[n] = \nabla(x[n]) = x[n] - x[n - 1]$$
- Όπου $x[n]$ και $y[n]$ είναι η είσοδος και η έξοδος, αντίστοιχα, του συστήματος που περιγράφει την «Πρώτη Διαφορά». Εξηγήστε αν η «Πρώτη Διαφορά» είναι γραμμική και χρονικά αμετάβλητη.

Προσοχή! Οι ασκήσεις είναι ατομικές.