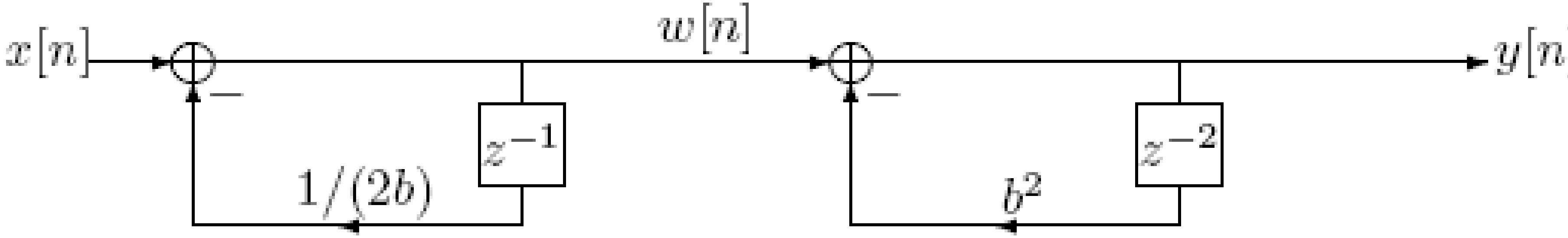
Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων

Ιωάννης Χαρ. Κατσαβουνίδης
Τμήμα Μηχ. Η/Υ, Τηλεπ. & Δικτύων
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Φθινοπωρινό Εξάμηνο 2009/10

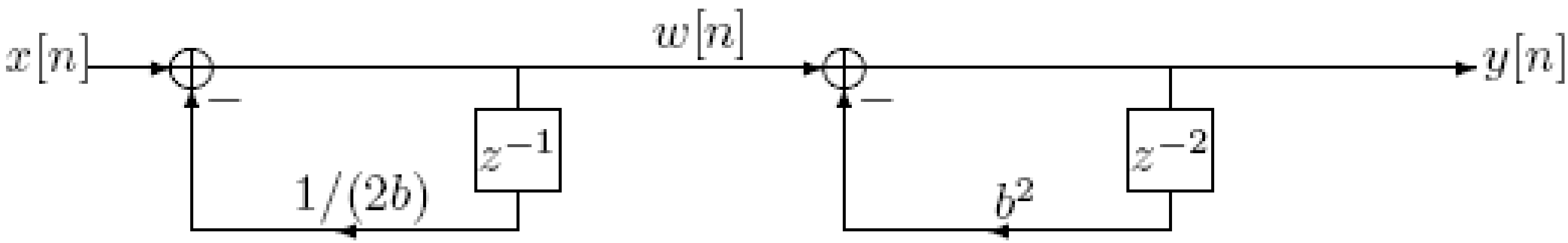
Άσκηση 1

- Να βρείτε την περιοχή τιμών του b για τις οποίες το σύστημα είναι αιτιατό και ευσταθές:



Λύση 1

Πρώτα, θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Το κάνουμε, γράφοντας τις εξισώσεις των δύο υπο-συστημάτων



$$w[n] = x[n] - \frac{1}{2b} w[n-1] \qquad y[n] = w[n] - b^2 y[n-2]$$

Λύση 1 (συνέχεια)

Παίρνοντας μετασχηματισμό Ζ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο, έχουμε

$$W(z) = X(z) - \frac{1}{2b} z^{-1} W(z) \Rightarrow W(z)\left(1 + \frac{1}{2bz}\right) = X(z)$$

$$\Rightarrow \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{2bz}{1+2bz} \qquad (1)$$

$$Y(z) = W(z) - b^2 z^{-2} Y(z) \Rightarrow Y(z)\left(1 + \frac{b^2}{z^2}\right) = W(z)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{z^2}{z^2 + b^2} \qquad (2)$$

Λύση 1 (συνέχεια)

Συνδιάζοντας τις (1) & (2), παίρνουμε:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{W(z)}\frac{W(z)}{X(z)} = \frac{z^2}{z^2+b^2}\frac{2bz}{1+2bz} = \frac{2bz^3}{(1+2bz)(z^2+b^2)}$$

Το σύστημα έχει 3 πόλους:

$$z_1 = -\frac{1}{2b}, \quad z_{2,3} = \pm j|b|$$

Με πλάτος, αντίστοιχα,

$$|z_1| = \left|\frac{1}{2b}\right|, \quad |z_{2,3}| = |b|$$

Λύση 1 (συνέχεια)

Για να είναι το σύστημα ευσταθές και αιτιατό, πρέπει όλοι οι πόλοι του να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή

$$\left|z_{1,2,3}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{2b}\right| < 1 \,\&\, \left|b\right| < 1 \Rightarrow \left|b\right| > \frac{1}{2} \,\&\, \left|b\right| < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \left|b\right| < 1$$

Άσκηση 2

Να αναπτύξετε σε εκθετική και τριγωνομετρική σειρά Fourier το παρακάτω περιοδικό σήμα

$$x(t+kT_0)=x(t), \quad \forall k \in Z$$

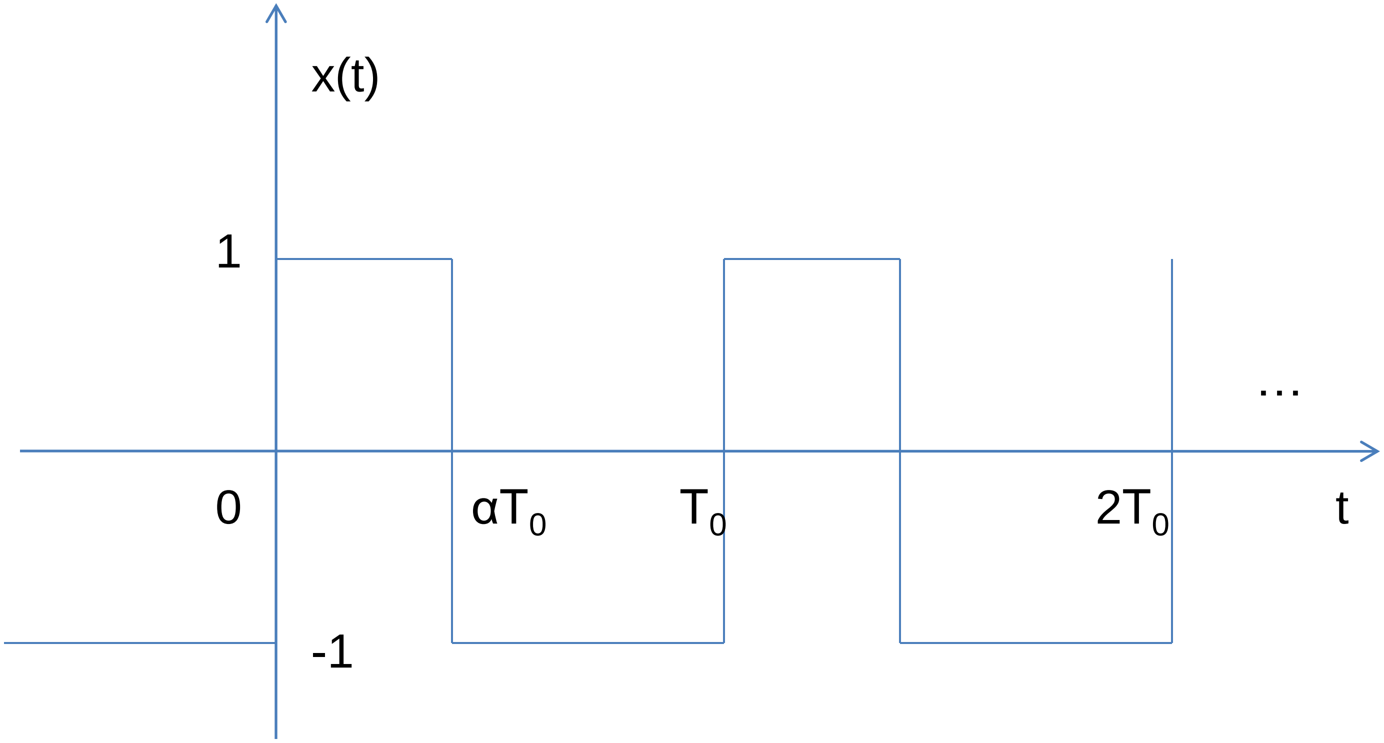
$$x(t)=\begin{cases} 1, & 0 \le t < \alpha T_0 \\ -1, & \alpha T_0 \le t < T_0 \end{cases}$$

όπου T_0 και α είναι σταθερές, $T_0>0$, $0<\alpha<1$.

Να υπολογίσετε και να δώσετε τη γραφική παράσταση του πλάτους και της φάσης των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier για την περίπτωση α=0.25.

Λύση 2

Το σήμα έχει τη μορφή:



Λύση 2 (συνέχεια)

Από τον ορισμό της εκθετικής σειράς Fourier περιοδικής συνάρτησης με βασική περίοδο $T_{0,}$ έχουμε

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega_0 t}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για το σήμα που μας δίνεται, παίρνουμε

Λύση 2 (συνέχεια)

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\alpha T_0} e^{-jn\Omega_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_{\alpha T_0}^{T_0} e^{-jn\Omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\left(\int_0^{\alpha T_0} e^{-jn\Omega_0 t}dt - \int_{\alpha T_0}^{T_0} e^{-jn\Omega_0 t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{-T_0 jn\Omega_0}\left(\int_0^{\alpha T_0} e^{-jn\Omega_0 t}d(-jn\Omega_0 t) - \int_{\alpha T_0}^{T_0} e^{-jn\Omega_0 t}d(-jn\Omega_0 t)\right)$$

$$= \frac{1}{-jn2\pi}\left(e^x\Big|_{x=0}^{x=-jn\Omega_0\alpha T_0} - e^x\Big|_{x=-jn\Omega_0\alpha T_0}^{x=-jn\Omega_0 T_0}\right)$$

Λύση 2 (συνέχεια)

$$c_n = \frac{1}{-jn2\pi}\left(\left(e^{-jn\Omega_0 \alpha T_0} - e^{0}\right) - \left(e^{-jn\Omega_0 T_0} - e^{-jn\Omega_0 \alpha T_0}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{-jn2\pi}\left(\left(e^{-jn\alpha 2\pi} - 1\right) - \left(e^{-jn2\pi} - e^{-jn\alpha 2\pi}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{-jn2\pi}\left(\left(e^{-jn\alpha 2\pi} - 1\right) - \left(1 - e^{-jn\alpha 2\pi}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{-jn2\pi} 2\left(e^{-jn\alpha 2\pi} - 1\right) = \frac{1 - e^{-jn\alpha 2\pi}}{jn\pi}$$

Λύση 2 (συνέχεια)

Για n=0, έχουμε

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\alpha T_0} dt - \frac{1}{T_0}\int_{\alpha T_0}^{T_0} dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\left(\alpha T_0 - \left(T_0 - \alpha T_0\right)\right) = 2\alpha - 1$$

Η τριγωνομετρική σειρά Fourier προκύπτει από την εκθετική σειρά με βάση τις σχέσεις

Λύση 2 (συνέχεια)

$$a_0 = c_0 = 2\alpha - 1$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1 - e^{-jn\alpha 2\pi}}{j\pi n} + \frac{1 - e^{jn\alpha 2\pi}}{-j\pi n}$$

$$= \frac{1 - e^{-jn\alpha 2\pi} - 1 + e^{jn\alpha 2\pi}}{j\pi n} = \frac{e^{jn\alpha 2\pi} - e^{-jn\alpha 2\pi}}{j\pi n} = \frac{2\sin(\alpha 2n\pi)}{n\pi}$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) = j\left(\frac{1 - e^{-jn\alpha 2\pi}}{j\pi n} - \frac{1 - e^{jn\alpha 2\pi}}{-j\pi n}\right)$$

$$= \frac{\left(1 - e^{-jn\alpha 2\pi} + 1 - e^{jn\alpha 2\pi}\right)}{n\pi} = \frac{2(1 - \cos(\alpha 2n\pi))}{n\pi}$$

Λύση 2 (συνέχεια)

Για α=0.25, οι προηγούμενες σχέσεις γίνονται:

$$c_0 = 2\cdot 0.25 - 1 = -0.5$$

$$c_n = \frac{1-e^{-jn\alpha 2\pi}}{jn\pi} = \frac{1-e^{-jn\cdot 0.25\cdot 2\pi}}{jn\pi} = \frac{1-e^{-jn\cdot 0.5\cdot \pi}}{jn\pi}$$

$$= \frac{1-e^{-j\frac{n\pi}{2}}}{jn\pi} = \frac{1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+j\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{jn\pi}$$

Λύση 2 (συνέχεια)

Το πλάτος και η φάση των εκθετικών συντελεστών είναι:

$$\left|c_0\right| = 0.5, \quad \angle c_0 = -\pi$$

$$\left|c_n\right| = \frac{\left|1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|}{\left|jn\pi\right|} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}}{n\pi}, \quad n > 0$$

Λύση 2 (συνέχεια)

$$\left|c_n\right| = \frac{\sqrt{1+\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)-2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}}{n\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2-2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}}{n\pi}, \quad n>0$$

$$\angle c_n = \arctan\left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\right]-\frac{\pi}{2}, \quad n>0$$

Λύση 2 (συνέχεια)

Οι πρώτες τιμές των συντελεστών είναι:

$$\left|c_{1+4k}\right| = \frac{\sqrt{2-2\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}}{n\pi} = \frac{\sqrt{2}}{n\pi}$$

$$\left|c_{2+4k}\right| = \frac{\sqrt{2-2\cos\left(2k\pi+\frac{2\pi}{2}\right)}}{n\pi} = \frac{\sqrt{2-2\cos(\pi)}}{n\pi} = \frac{\sqrt{4}}{n\pi} = \frac{2}{n\pi}$$

Λύση 2 (συνέχεια)

Οι πρώτες τιμές των συντελεστών είναι:

$$\angle c_1 = \arctan\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right] - \frac{\pi}{2} = \arctan(1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\angle c_2 = \arctan\left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)}\right] - \frac{\pi}{2} = \arctan(0) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Λύση 2 (συνέχεια)

Οι πρώτες τιμές των συντελεστών είναι:

$$\left|c_{3+4k}\right| = \frac{\sqrt{2-2\cos\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)}}{n\pi} = \frac{\sqrt{2}}{n\pi}$$

$$\left|c_{4+4k}\right| = \frac{\sqrt{2-2\cos\left(2k\pi+\frac{4\pi}{2}\right)}}{n\pi} = \frac{\sqrt{2-2}}{n\pi} = 0$$

Λύση 2 (συνέχεια)

Οι πρώτες τιμές των συντελεστών είναι:

$$\angle c_3 = \arctan\left[\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\right]-\frac{\pi}{2} = \arctan(-1)-\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\angle c_4 = \arctan\left[\frac{\sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right)}\right]-\frac{\pi}{2} = 0 \quad (\sigma\upsilon\mu\beta\alpha\sigma\eta)$$

Λύση 2 (συνέχεια)

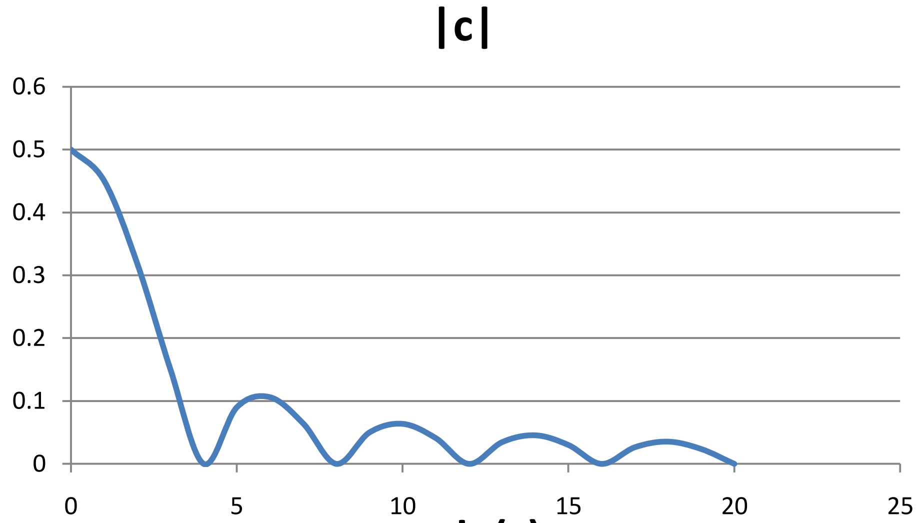
Οι πρώτες τιμές των συντελεστών είναι:

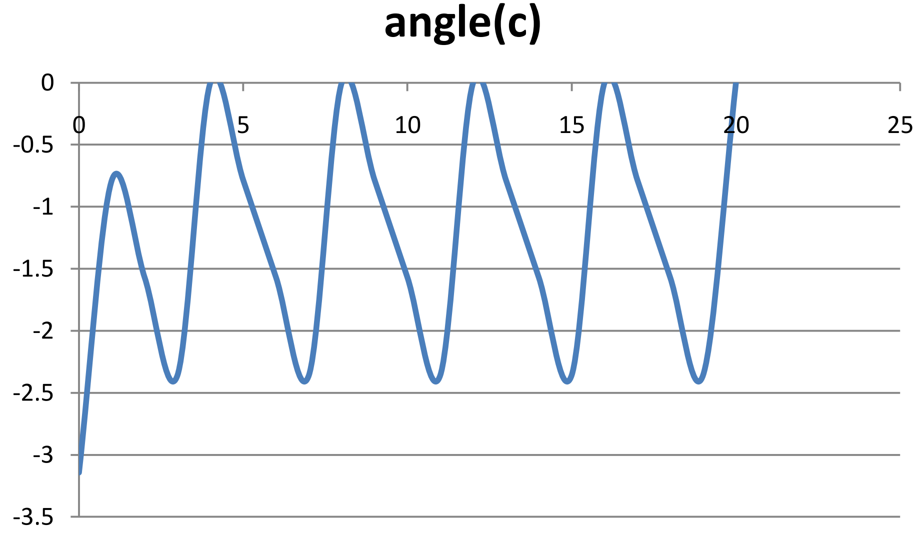
$$\left|c_n\right| = \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{\pi}, \frac{2}{2\pi}, \frac{\sqrt{2}}{3\pi}, 0, \frac{\sqrt{2}}{5\pi}, \frac{2}{6\pi}, \frac{\sqrt{2}}{7\pi}, 0, \cdots\right\}$$

$$\angle c_n = \left\{-\pi, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, 0, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, 0, \cdots\right\}$$

Λύση 2 (συνέχεια)

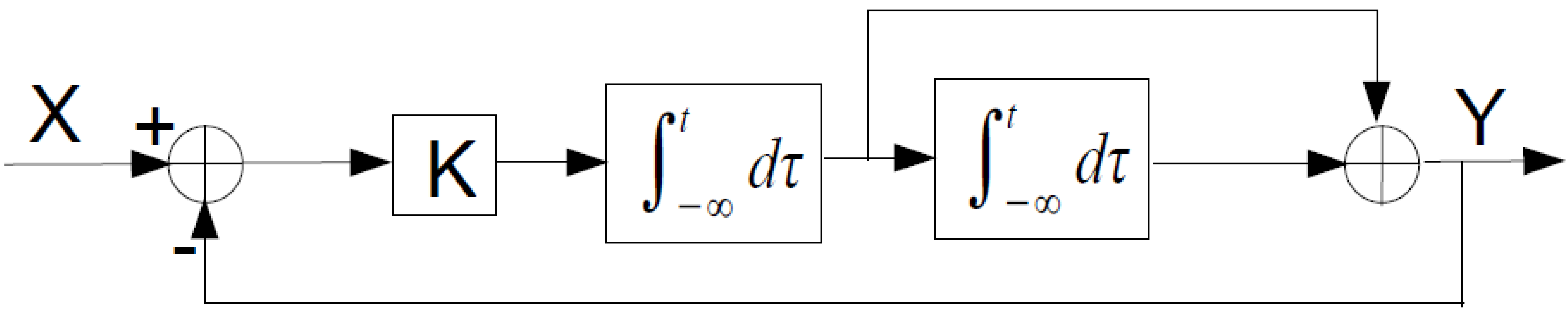
Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις είναι:





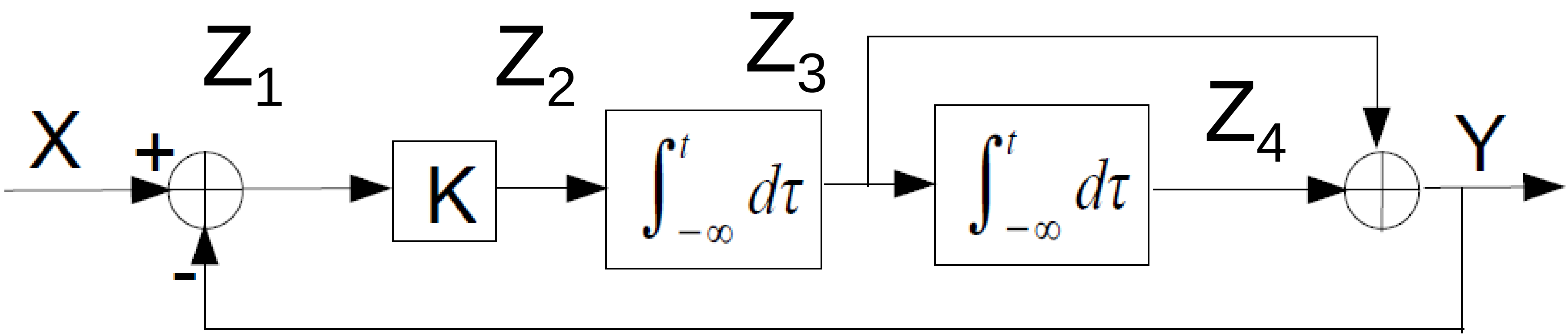
Άσκηση 3

Στο παρακάτω αιτιατό σύστημα, να υπολογίσετε την συνάρτηση μεταφοράς. Επίσης, να βρείτε για ποιες τιμές του Κ το σύστημα είναι ευσταθές.



Λύση 3

Θα δώσουμε σύμβολα στα ενδιάμεσα σήματα, ως κάτωθι:



Λύση 3 (συνέχεια)

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως εξής:

$$
\begin{aligned}
Z_1(t) &= X(t) - Y(t) \\
Z_2(t) &= K \cdot Z_1(t) \\
Z_3(t) &= \int_{-\infty}^{t} Z_2(\tau)\, d\tau \\
Z_4(t) &= \int_{-\infty}^{t} Z_3(\tau)\, d\tau \\
Y(t) &= Z_3(t) + Z_4(t)
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
Z_1(s) &= X(s) - Y(s) \\
Z_2(s) &= K \cdot Z_1(s) \\
Z_3(s) &= \frac{Z_2(s)}{s} \\
Z_4(s) &= \frac{Z_3(s)}{s} \\
Y(s) &= Z_3(s) + Z_4(s)
\end{aligned}
$$

Λύση 3 (συνέχεια)

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως εξής:

$$Z_2(s) = K \cdot (X(s) - Y(s))$$

$$Z_3(s) = \frac{Z_2(s)}{s}$$

$$\Rightarrow$$

$$Z_4(s) = \frac{Z_3(s)}{s}$$

$$Y(s) = Z_3(s) + Z_4(s)$$

$$\Rightarrow$$

$$Z_3(s) = \frac{K \cdot (X(s) - Y(s))}{s}$$

$$Z_4(s) = \frac{Z_3(s)}{s}$$

$$Y(s) = Z_3(s) + Z_4(s)$$

Λύση 3 (συνέχεια)

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως εξής:

$$Z_3(s) = \frac{K \cdot (X(s) - Y(s))}{s}$$

$$\Rightarrow \quad Z_4(s) = \frac{K \cdot (X(s) - Y(s))}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{K \cdot (X(s) - Y(s))}{s} + \frac{K \cdot (X(s) - Y(s))}{s^2}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{Ks \cdot (X(s) - Y(s)) + K \cdot (X(s) - Y(s))}{s^2}$$

Λύση 3 (συνέχεια)

$$\Rightarrow s^2Y(s) = Ks \cdot (X(s) - Y(s)) + K \cdot (X(s) - Y(s))$$

$$\Rightarrow s^2Y(s) = KsX(s) - KsY(s) + KX(s) - KY(s)$$

$$\Rightarrow s^2Y(s) + KsY(s) + KY(s) = KsX(s) + KX(s)$$

$$\Rightarrow (s^2 + Ks + K)Y(s) = (Ks + K)X(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ks + K}{s^2 + Ks + K} = \frac{K(s+1)}{s^2 + Ks + K}$$

Λύση 3 (συνέχεια)

Για να είναι το σύστημα ευσταθές, πρέπει οι πόλοι του να βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, δηλαδή $\mathrm{Re}(s_{1,2})<0$.

$$s^2 + Ks + K = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = K^2 - 4 \cdot 1 \cdot K = K^2 - 4K$$

$$s_{1,2} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - 4K}}{2}$$

Συνεπώς, μας ενδιαφέρουν τα πρόσημα των όρων $-K \pm \sqrt{K^2 - 4K}$

Λύση 3 (συνέχεια)

Περίπτωση 1: K>0

Αν $K^2 - 4K \geq 0 \Rightarrow 0 \leq K^2 - 4K < K^2$

$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{K^2 - 4K} < K \Rightarrow -K \pm \sqrt{K^2 - 4K} < 0$ (ευσταθές)

Αν $K^2 - 4K < 0 \Rightarrow \sqrt{K^2 - 4K} = \pm jA$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(-K \pm \sqrt{K^2 - 4K}\right) = -K < 0$ (ευσταθές)

Περίπτωση 2: K≤0

Αν $K^2 - 4K \geq 0 \Rightarrow -K + \sqrt{K^2 - 4K} \geq 0$ (ασταθές)

Αν $K^2 - 4K < 0 \Rightarrow \sqrt{K^2 - 4K} = \pm jA$

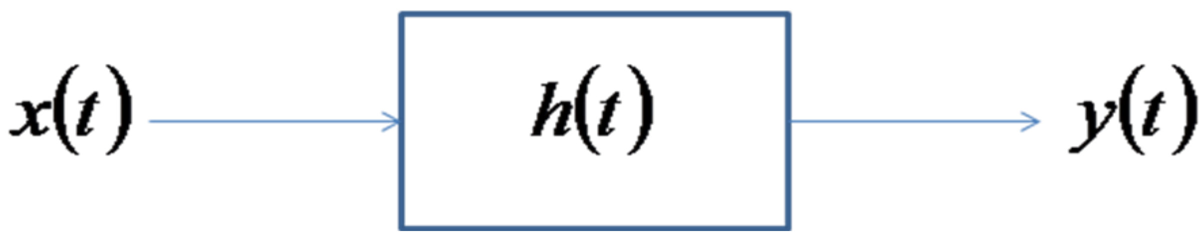
$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(-K \pm \sqrt{K^2 - 4K}\right) = -K \geq 0$ (ασταθές)

Λύση 3 (συνέχεια)

Συνεπώς, για να είναι το σύστημα ευσταθές, πρέπει $K>0$.

Άσκηση 4

Α) Έστω το παρακάτω ευσταθές ΓΧΑ σύστημα, με είσοδο x(t) που είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.



Να δείξετε ότι

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt\right)=\left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt\right)$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

B) Να υπολογίσετε την ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας που επιτρέπει ανάκτηση από τα δείγματα του σήματος

$$f(t) = \frac{\sin^2(600\pi t)}{t^2}$$

Λύση 4

A) Η πρώτη μέθοδος είναι μέσω της συνέλιξης:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt = \int_{t=-\infty}^{\infty}\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau dt = \int_{t=-\infty}^{\infty}\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau dt$$

$$= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\int_{t=-\infty}^{\infty} h(t-\tau)dt\right)d\tau = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} h(x)dx\right)\left(\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau\right)$$

$$\forall \tau \in R\,(\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o)$$

$$x = t-\tau \Rightarrow dx = dt$$

$$t \to -\infty \Rightarrow x \to -\infty$$

$$t \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty$$

Λύση 4 (συνέχεια)

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμό Fourier:

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

Θέτωντας $\Omega = 0 \Rightarrow Y(0) = X(0) \cdot H(0)$

Με βάση τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier,

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \Rightarrow X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j0t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

Από όπου προκύπτει το ζητούμενο

Λύση 4 (συνέχεια)

B) Γνωρίζουμε το παρακάτω ζεύγος μετασχηματισμού Fourier:

$$x(t) = \frac{\sin \Omega_0 t}{\pi t} \leftrightarrow X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_0 \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_0 \end{cases}$$

και με βάση το θεώρημα συνέλιξης

$$x(t) \cdot x(t) = x^2(t) = \frac{\sin^2 \Omega_0 t}{\pi^2 t^2} \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * X(\Omega)$$

Η συνέλιξη δύο τετραγωνικών παλμών με βάση $[-\Omega_0,+\Omega_0]$ δίνει ένα τριγωνικό παλμό με βάση $[-2\Omega_0,+2\Omega_0]$

Λύση 4 (συνέχεια)

Η συνάρτηση f(t) μπορεί να γραφτεί ως

$$f(t) = \frac{\sin^2(600\pi t)}{t^2} = \pi^2 \frac{\sin^2(\Omega_0 t)}{\pi^2 t^2}, \Omega_0 = 600\pi$$

ήτοι, η μέγιστη (κυκλική) συχνότητά της είναι $2\Omega_0 = 1200\pi$

Το θεώρημα Nyquist απαιτεί ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας τουλάχιστον διπλάσια της μέγιστης συχνότητας του σήματος, δηλαδή, $\Omega_s \geq 2400\pi \Rightarrow f_s \geq 1200$Hz.

Άσκηση 5

Για τα παρακάτω συστήματα, να υπολογίσετε και να εξηγήσετε αν είναι γραμμικά, αιτιατά, χρονικά αμετάβλητα και ΦΕΦΕ ευσταθή.

$$y(t) = x(t+2)\sin(\omega t + 2),\ \omega \neq 0$$

$$y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\left(x[n]+1\right)$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^{n}\left(x^{2}[k+1] - x[k]\right)$$

Λύση 5

- Αιτιατότητα:

Παρατηρούμε ότι στο σύστημα

$$y(t) = x(t+2)\sin(\omega t + 2),\ \omega \neq 0$$

η έξοδος κατά το χρόνο t, εξαρτάται από την είσοδο κατά το χρόνο (t+2), συνεπώς **μη-αιτιατό**.

Για το σύστημα $y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\left(x[n]+1\right)$, η έξοδος εξαρτάται από την είσοδο κατά την ίδια χρονική στιγμή (t), συνεπώς **αιτιατό**.

Λύση 5 (συνέχεια)

- Αιτιατότητα (συνέχεια):

Παρατηρούμε ότι στο σύστημα

$$y[n] = \sum_{k=1}^{n} \left(x^2[k+1] - x[k] \right)$$

η έξοδος κατά το χρόνο n, εξαρτάται από την είσοδο κατά το χρόνο (1,…,n+1), συνεπώς **μη-αιτιατό**.

Λύση 5 (συνέχεια)

- Χρονική αμεταβλητότητα:

Για το σύστημα

$$y(t) = x(t+2)\sin(\omega t + 2), \ \omega \neq 0$$

Θεωρούμε την είσοδο μετατοπισμένη (χρονικά) κατά t_0=2. $x'(t) = x(t-2)$

Η έξοδος σε αυτή την περίπτωση είναι

$$y'(t) = x'(t+2)\sin(\omega t + 2) = x(t)\sin(\omega t + 2)$$

Ενώ $y(t-2) = x(t)\sin(\omega(t-2)+2)$

Συνεπώς, $y'(t) \neq y(t-2)$, ήτοι **μη χρονικά αμετάβλητο**.

Λύση 5 (συνέχεια)

- Χρονική αμεταβλητότητα (συνέχεια):

Για το σύστημα

$$y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x[n]+1)$$

Ο όρος $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ λειτουργεί όπως ο όρος $\sin(\omega t + 2)$ του προηγούμενου συστήματος.

Συνεπώς, **μη χρονικά αμετάβλητο**.

Λύση 5 (συνέχεια)

- Χρονική αμεταβλητότητα (συνέχεια):

Για το σύστημα

$$y[n] = \sum_{k=1}^{n} \left(x^2[k+1] - x[k] \right)$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα έχει μεταβλητό αριθμό όρων. Έστω x[n]=n.

$y[1] = x^2[2]-x[1] = 4-1 = 3$,

$y[2] = x^2[3]-x[2]+x^2[2]-x[1] = 9-2+4-1 = 10$.

Λύση 5 (συνέχεια)

- Χρονική αμεταβλητότητα (συνέχεια):

Θεωρούμε τη μετατόπιση κατά 1

$$x'[n] = x[n-1] = n-1$$

$$y'[n] = \sum_{k=1}^{n} \left(x'^2[k+1] - x'[k] \right)$$

$$\Rightarrow y'[1] = x'^2[2] - x'[1] = (2-1)^2 - (1-1) = 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow y'[2] = x'^2[3] - x'[2] + x'^2[2] - x'[1]$$

$$= (3-1)^2 - (2-1) + (2-1)^2 - (1-1) = 4 - 1 + 1 - 0 = 4$$

y’[2]≠y[1], Συνεπώς, **μη χρονικά αμετάβλητο**.

Λύση 5 (συνέχεια)

- Γραμμικότητα:

Για το σύστημα

$$y(t) = x(t+2)\sin(\omega t + 2),\ \omega \neq 0$$

$$x_1(t) \to y_1(t) = x_1(t)\sin(\omega t + 2)$$

$$x_2(t) \to y_2(t) = x_2(t)\sin(\omega t + 2)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \to y(t) = \left(ax_1(t) + bx_2(t)\right)\sin(\omega t + 2) =$$

$$ax_1(t)\sin(\omega t + 2) + bx_2(t)\sin(\omega t + 2) = ay_1(t) + by_2(t)$$

Συνεπώς, **γραμμικό**.

Λύση 5 (συνέχεια)

- Γραμμικότητα (συνέχεια):

Για το σύστημα

$$y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x[n]+1)$$

Με είσοδο x[n]=0

$$y[0] = \left(-\frac{1}{2}\right)^0 (1) = 1$$

Συνεπώς, **μη γραμμικό**.

Λύση 5 (συνέχεια)

- Γραμμικότητα (συνέχεια):

Για το σύστημα

$$y[n] = \sum_{k=1}^{n}\left(x^2[k+1] - x[k]\right)$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει την έξοδο για x[n]=n.

y[1] = x^2[2]-x[1] = 4-1 = 3.

Η έξοδος για x'[n]=2x[n]=2n είναι

$$y'[1] = x'^2[2] - x'[1] = 4^2 - 2 = 14$$

Συνεπώς, **μη γραμμικό**.

Λύση 5 (συνέχεια)

- ΦΕΦΕ ευστάθεια:

Για το σύστημα

$$y(t) = x(t+2)\sin(\omega t + 2), \omega \neq 0$$

$$|x(t)| < M, |\sin(\omega t + 2)| < 1$$

$$\Rightarrow |x(t)||\sin(\omega t + 2)| < M$$

$$\Rightarrow |y(t)| < M$$

Συνεπώς, **ΦΕΦΕ ευσταθές.**

Λύση 5 (συνέχεια)

- Γραμμικότητα (συνέχεια):

Για το σύστημα

$$y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x[n]+1)$$

Θεωρούμε την είσοδο x[n]=0. Εφόσον

$$\lim \xrightarrow[n \to -\infty]{} \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right| = \lim |y[n]| = \infty$$

Συνεπώς, **μη ΦΕΦΕ ευσταθές**.

Λύση 5 (συνέχεια)

- Γραμμικότητα (συνέχεια):

Για το σύστημα

$$y[n]=\sum_{k=1}^{n}\left(x^2[k+1]-x[k]\right)$$

Θεωρούμε την είσοδο x[n]=2.

$$y[n]=\sum_{k=1}^{n}\left(4-2\right)=2n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$$

Συνεπώς, **μη ΦΕΦΕ ευσταθές**.