Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων

Ιωάννης Χαρ. Κατσαβουνίδης
Τμήμα Μηχ. Η/Υ, Τηλεπ. & Δικτύων
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Φθινοπωρινό Εξάμηνο 2009/10

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε το παρακάτω άθροισμα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Θυμίζουμε την ανάπτυξη σε σειρά Fourier του περιοδικού σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin \Omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\Omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\Omega_0 t + \cdots \right)$$

Λύση 1

Από το θεώρημα του Parseval,

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|x(t)\right|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

και χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη σε σειρά Fourier που μας δίνεται,

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = 1 = \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n:odd}}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

Λύση 1 (συνέχεια)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{\substack{n=1\\ n:even}}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n:odd}}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Συνδυάζοντας τα δύο αυτά αποτελέσματα, παίρνουμε

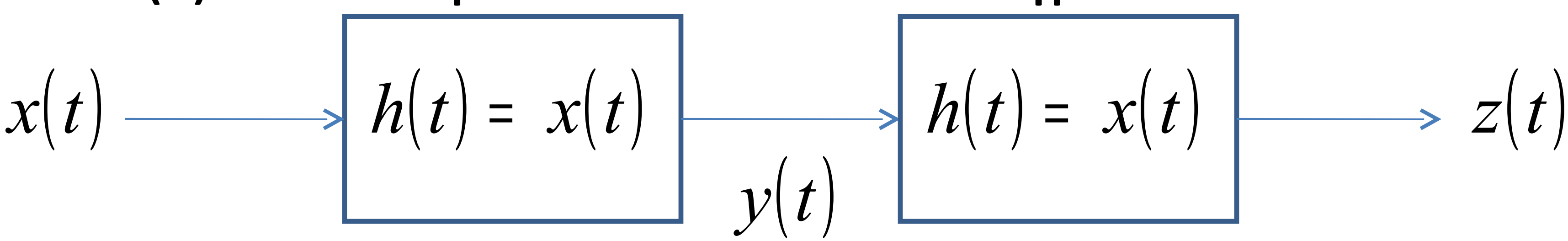
$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{6}\cong 1.645$$

Άσκηση 2

Έστω η συνάρτηση μοναδιαίου παλμού,

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τα σήματα y(t), z(t) καθώς και τους μετασχηματισμούς Fourier των x(t), y(t) & z(t) στο παρακάτω ΓΧΑ σύστημα



Λύση 2

$$y(t) = x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} x(t-\tau)d\tau$$

a) $t < -1 \Rightarrow \forall \tau \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), x(t-\tau) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$

a) $-1 \le t < 0 \Rightarrow \begin{cases} \forall \tau \in \left(-\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}\right), x(t-\tau) = 1 \\ \forall \tau \in \left(t+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), x(t-\tau) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-1/2}^{t+1/2} d\tau = t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = t + 1$$

Λύση 2 (συνέχεια)

a) $$0 \le t < 1 \Rightarrow \begin{cases} \forall \tau \in \left(-\dfrac{1}{2}, t-\dfrac{1}{2}\right), x(t-\tau) = 0 \\ \forall \tau \in \left(t-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right), x(t-\tau) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \int_{t-1/2}^{1/2} d\tau = \frac{1}{2} - t + \frac{1}{2} = 1 - t$$

a) $$t \ge 1 \Rightarrow \forall \tau \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), x(t-\tau) = 0 \Rightarrow \quad y(t) = 0$$

Λύση 2 (συνέχεια)

Συνεπώς, η συνάρτηση y(t) είναι η παρακάτω:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1+t, & -1 \le t < 0 \\ 1-t, & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι ο τριγωνικός παλμός βάσης [-1,1] και ύψους 1.

Λύση 2 (συνέχεια)

$$z(t) = y(t) * x(t) = \int_{-1}^{0} (\tau + 1) x(t - \tau) d\tau + \int_{0}^{1} (1 - \tau) x(t - \tau) d\tau$$

a) $t < -\dfrac{3}{2} \Rightarrow \forall \tau \in (-1,1), x(t-\tau) = 0 \Rightarrow z(t) = 0$

a) $-\dfrac{3}{2} \leq t < -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \forall \tau \in \left(-1, t + \dfrac{1}{2}\right) \subseteq (-1,0), x(t-\tau) = 1 \\ \forall \tau \in \left(t + \dfrac{1}{2}, 1\right), x(t-\tau) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow z(t) = \int_{-1}^{t+1/2} (\tau + 1) d\tau = \int_{0}^{t+3/2} x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{t+3/2} = \frac{t^2 + 3t + \frac{9}{4}}{2}$$

Λύση 2 (συνέχεια)

a) $-\frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \forall \tau \in \left(t - \frac{1}{2}, 0\right) \subseteq (-1,0), x(t-\tau) = 1 \\ \forall \tau \in \left(0, t + \frac{1}{2}\right) \subseteq (0,1), x(t-\tau) = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow z(t) = \int_{t-1/2}^{0} (\tau + 1) d\tau + \int_{0}^{t+1/2} (1-\tau) d\tau = \int_{t-1/2}^{0} \tau d\tau - \int_{0}^{t+1/2} \tau d\tau + \int_{t-1/2}^{t+1/2} d\tau$$

$$= \frac{0 - \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right)}{2} - \frac{\left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) - 0}{2} + 1$$

$$= \frac{-t^2 + t - \frac{1}{4} - t^2 - t - \frac{1}{4}}{2} + 1 = -t^2 - \frac{1}{4} + 1 = -t^2 + \frac{3}{4}$$

Λύση 2 (συνέχεια)

a) $\frac{1}{2} \le t < \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \forall \tau \in \left(t - \frac{1}{2}, 1\right) \subseteq (0,1), x(t-\tau) = 1 \\ \forall \tau \in \left(1, t + \frac{1}{2}\right), x(t-\tau) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$z(t) = \int_{t-1/2}^{1} (1-\tau)\,d\tau = -\int_{-t+3/2}^{0} x\,dx = \int_{0}^{-t+3/2} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{-t+3/2} = \frac{t^2 - 3t + \frac{9}{4}}{2}$$

a) $t > \frac{3}{2} \Rightarrow \forall \tau \in (-1,1), x(t-\tau) = 0 \Rightarrow z(t) = 0$

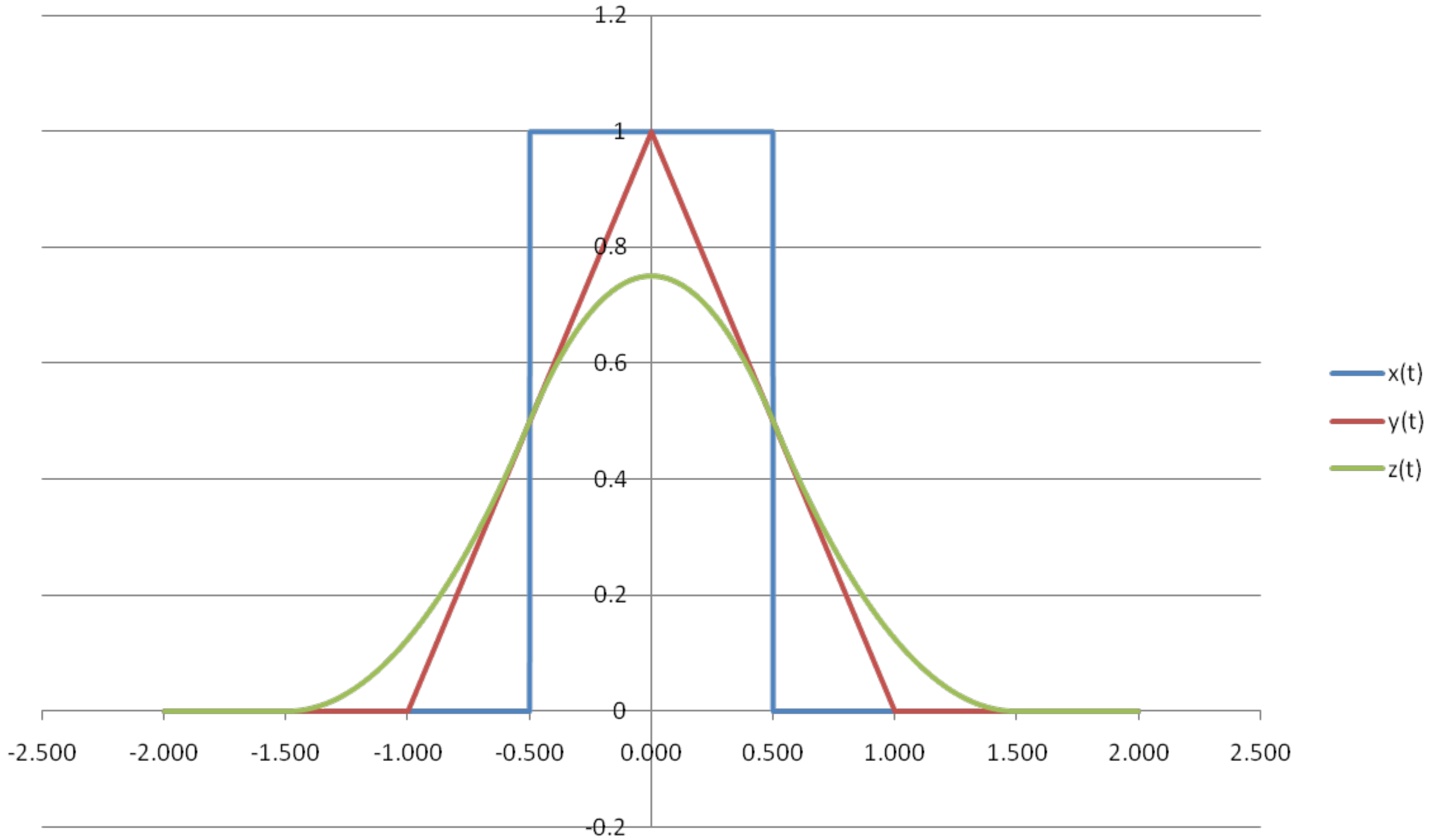
Λύση 2 (συνέχεια)

Συνεπώς, η συνάρτηση z(t) είναι η παρακάτω:

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{t^2 + 3t + 9/4}{2}, & -\dfrac{3}{2} \le t < -\dfrac{1}{2} \\ -t^2 + 3/4, & -\dfrac{1}{2} \le t < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{t^2 - 3t + 9/4}{2}, & \dfrac{1}{2} \le t < \dfrac{3}{2} \\ 0, & \dfrac{3}{2} \le t \end{cases}$$

Λύση 2 (συνέχεια)

Οι 3 συναρτήσεις x(t), y(t), z(t) είναι οι παρακάτω:



Λύση 2 (συνέχεια)

Οι μετασχηματισμοί Fourier των 3 συναρτήσεων υπολογίζονται με τη βοήθεια του θεωρήματος της συνέλιξης:

$$X(\Omega) = \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\frac{\Omega}{2}}, \quad Y(\Omega) = X(\Omega)X(\Omega) = \frac{\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2}$$

$$Z(\Omega) = Y(\Omega)X(\Omega) = \frac{\sin^3\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^3}$$

Άσκηση 3

Έστω το παρακάτω ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

και η είσοδος και έξοδος είναι οι παρακάτω:

$$x(n) = \begin{cases} (-1)^{n/2}, & n \geq 0, n : even \\ 0, & else \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} n(-1)^{n/2}, & n \geq 0, n : even \\ 0, & else \end{cases}$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Να υπολογίσετε:

1) Το μετασχηματισμό Z της ακολουθίας εισόδου, X(z)
2) Το μετασχηματισμό Z της ακολουθίας εξόδου, Y(z)
3) Τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, H(z) – τοποθετήστε τους πόλους στο μιγαδικό επίπεδο
4) Την κρουστική απόκριση του συστήματος, h(n) – να δώσετε τη γραφική παράσταση των πρώτων 8 τιμών της.

Λύση 3

Παρατηρούμε ότι τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι αιτιατά (δηλαδή, x(n)=y(n)=0, $\forall$n<0).Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Ζ, έχουμε

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{\substack{n=0 \\ n:even}}^{\infty} x(n) z^{-n} + \sum_{\substack{n=1 \\ n:odd}}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} x(2k) z^{-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{z^2} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{-1}{z^2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2 + 1}$$

ΠΣ: $\left| \frac{-1}{z^2} \right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$

Λύση 3 (συνέχεια)

Παρατηρούμε πρώτα ότι η έξοδος y(n) = nx(n) και εφαρμόζουμε την ιδιότητα της παραγώγησης του μετασχηματισμού Z:

$$x(n) \leftrightarrow X(z), \quad nx(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$Y(z) = -z\frac{d\left(\dfrac{z^2}{z^2+1}\right)}{dz} = -z\frac{2z(z^2+1)-z^2 2z}{(z^2+1)^2}$$

$$= -z\frac{2z^3+2z-2z^3}{(z^2+1)^2} = \frac{-2z^2}{(z^2+1)^2}$$

ΠΣ: $|z| > 1$

Λύση 3 (συνέχεια)

Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\dfrac{-2z^2}{\left(z^2+1\right)^2}}{\dfrac{z^2}{z^2+1}} = -\frac{2}{z^2+1} \quad \text{ΠΣ: } |z| > 1$$

και συνεπώς έχει δύο πόλους, στο $\pm$j

$$H(z) = \frac{A_1}{z-j} + \frac{A_2}{z+j}, \quad A_1 = -\left.\frac{2}{z+j}\right|_{z=j} = -\frac{2}{2j} = j,$$

$$A_2 = -\left.\frac{2}{z-j}\right|_{z=-j} = -\frac{2}{-2j} = -j \quad \therefore\ H(z) = \frac{j}{z-j} - \frac{j}{z+j}$$

Λύση 3 (συνέχεια)

Ξαναγράφουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως:

$$H(z) = z^{-1} j \frac{z}{z-j} - z^{-1} j \frac{z}{z+j}, |z| > 1$$

όπου «βλέπουμε» του γνωστούς αντίστροφους μετασχηματισμούς Z,

$$j^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-j}, |z| > |j| = 1, \quad (-j)^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z+j}, |z| > |j| = 1$$

$$\Rightarrow \quad j^n u(n) - (-j)^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-j} - \frac{z}{z+j}$$

$$\Rightarrow \quad j\left[j^{n-1} u(n-1) - (-j)^{n-1} u(n-1)\right] \leftrightarrow z^{-1} j \left[\frac{z}{z-j} - \frac{z}{z+j}\right]$$

Λύση 3 (συνέχεια)

$$\therefore\ h(n) = j\left[j^{n-1} - (-j)^{n-1}\right]u(n-1) = j^{n}\left(1 + (-1)^{n}\right)u(n-1)$$

Ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

a) n: even (=2k,k>0)

$$\therefore\ h(2k) = j^{2k}\left(1 + (-1)^{2k}\right)u(2k-1) = (-1)^{k}(1+1)\,u(2k-1)$$

$$= 2(-1)^{k}u(2k-1)$$

a) n: odd (=2k+1,k≥0)

$$\therefore\ h(2k+1) = j^{2k+1}\left(1 + (-1)^{2k+1}\right)u(2k) = -j(1-1)\,u(2k) = 0$$

$$\therefore\ h(n) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}2, & n \geq 2, n : even \\ 0, & else \end{cases}$$

Λύση 3 (συνέχεια)

Συνεπώς, οι πρώτες 8 τιμές της h(n) είναι οι:

h(0) = 0

h(1) = 0

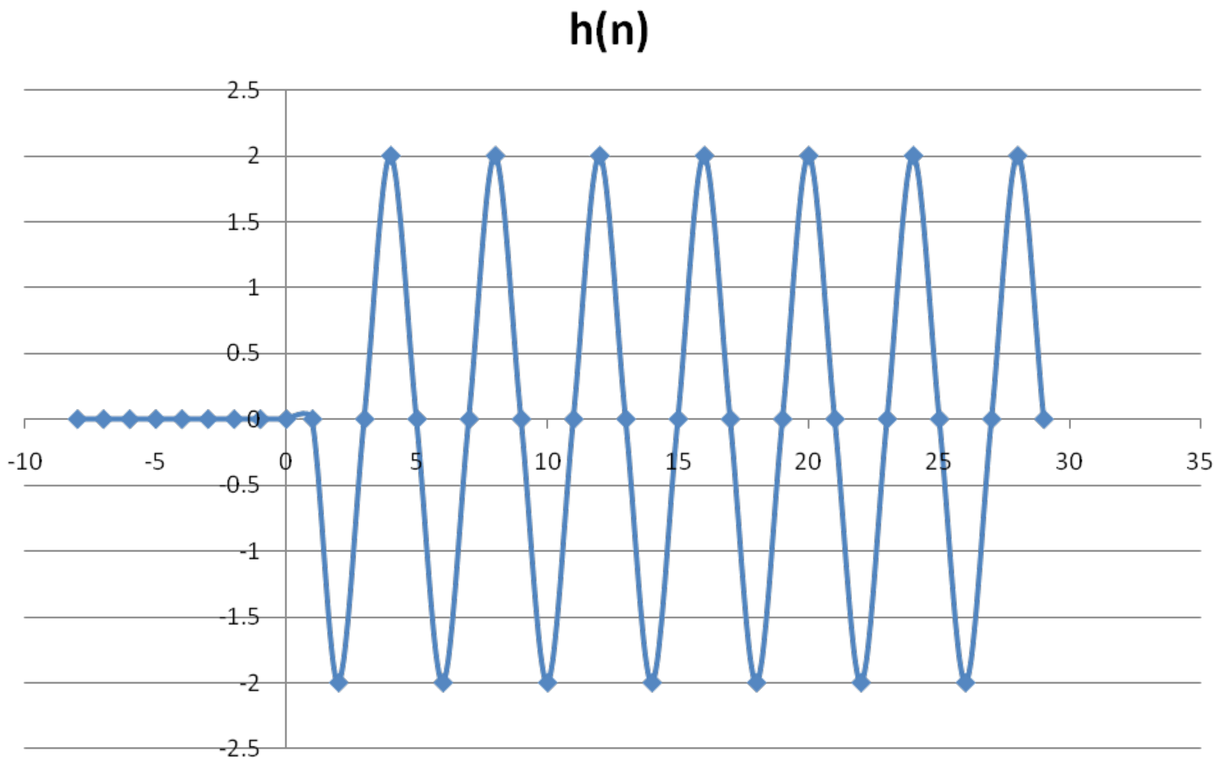
h(2) = -2

h(3) = 0

h(4) = 2

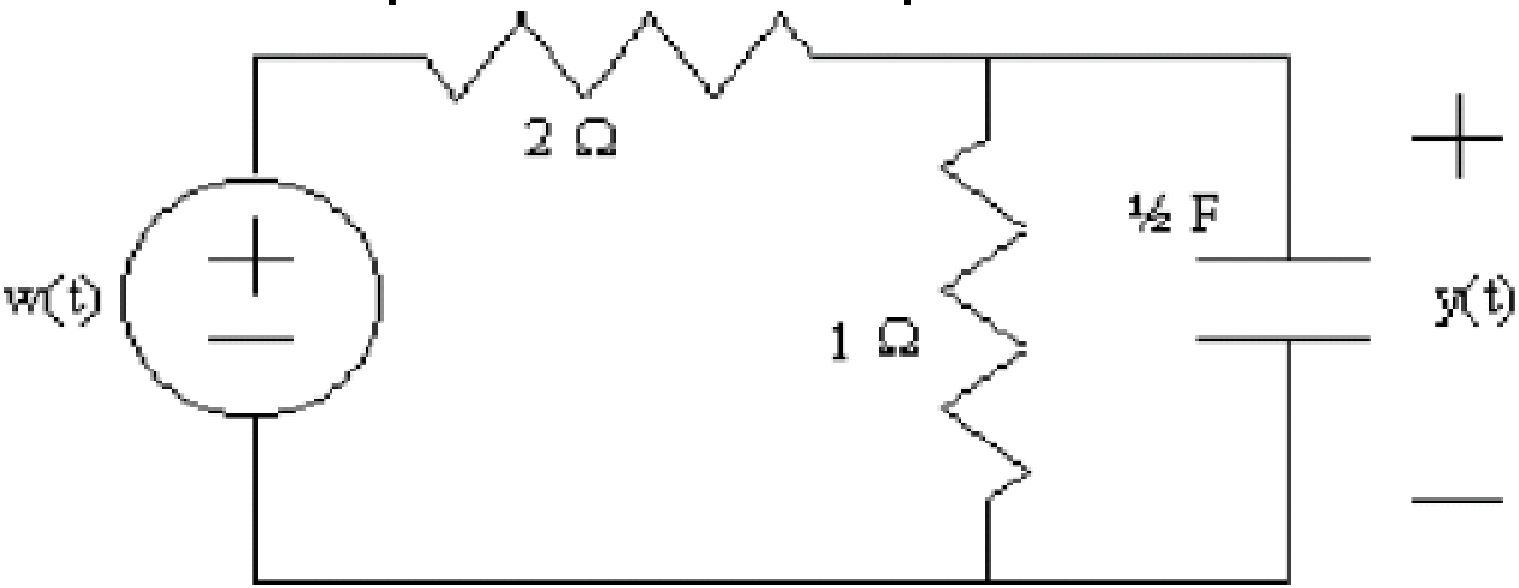
h(6) = 0

h(7) = -2



Άσκηση 4

Δίνεται το παρακάτω κύκλωμα:



a) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(\Omega) = \dfrac{Y(\Omega)}{W(\Omega)}$ και την κρουστική απόκριση h(t)

Άσκηση 4 (συνέχεια)

a) Να υπολογίσετε την έξοδο y(t) του συστήματος για είσοδο $w(t) = u(t+2) + e^{-4t}u(t-3)$ με δύο τρόπους:

(i) Με βάση τη συνέλιξη στο χρόνο

(ii) Με βάση το μετασχηματισμό Fourier

Λύση 4

Η συνολική αντίσταση που «βλέπει» η πηγή w(t) είναι

$$Z(\Omega) = 2 + \frac{1}{1 + j0.5\Omega} = \frac{2 + j\Omega + 1}{1 + j0.5\Omega} = \frac{3 + j\Omega}{1 + j0.5\Omega}$$

και το ρεύμα της αντίστασης 2 Ohm είναι

$$I(\Omega) = W(\Omega)\frac{1 + j0.5\Omega}{3 + j\Omega}$$

Λύση 4 (συνέχεια)

Η τάση y(t) δίνεται από τη σχέση

$$Y(\Omega) = W(\Omega) - 2I(\Omega) = W(\Omega) - 2W(\Omega)\frac{1 + j0.5\Omega}{3 + j\Omega}$$

$$= W(\Omega)\left[1 - 2\frac{1 + j0.5\Omega}{3 + j\Omega}\right] = W(\Omega)\frac{3 + j\Omega - 2 - j\Omega}{3 + j\Omega}$$

$$= W(\Omega)\frac{1}{3 + j\Omega} \Rightarrow H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{W(\Omega)} = \frac{1}{j\Omega + 3}$$

και η κρουστική απόκριση (μέσω αντίστροφου Fourier): $\Rightarrow h(t) = e^{-3t}u(t)$

Λύση 4 (συνέχεια)

Η τάση y(t) μέσω συνέλιξης δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = w(t) * h(t) = \left(u(t+2) + e^{-4t}u(t-3)\right) * e^{-3t}u(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-3\tau}\left(u(t-\tau+2) + e^{-4(t-\tau)}u(t-\tau-3)\right)d\tau$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty e^{-3\tau}u(t-\tau+2)d\tau}_{A} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-3\tau}e^{-4(t-\tau)}u(t-\tau-3)d\tau}_{B}$$

Λύση 4 (συνέχεια)

$$A = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ \int_0^{t+2} e^{-3\tau}\, d\tau\,, & t \geq -2 \end{cases} = u(t+2)\int_0^{t+2} e^{-3\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{u(t+2)}{-3}\int_0^{t+2} e^{-3\tau}\, d(-3\tau) = \frac{u(t+2)}{3}\int_{t+2}^{0} e^{-3\tau}\, d(-3\tau)$$

$$= \frac{u(t+2)}{3}\left(e^{-3\cdot 0} - e^{-3\cdot(t+2)}\right) = \frac{1-e^{-3\cdot(t+2)}}{3}u(t+2)$$

Λύση 4 (συνέχεια)

$$B = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ \int_0^t e^{-3\tau} e^{-4(t-\tau)} d\tau, & t \geq 3 \end{cases} = u(t-3) \int_0^{t-3} e^{-4t} e^{\tau} d\tau$$

$$= u(t-3) e^{-4t} \int_0^{t-3} e^{\tau} d\tau = u(t-3) e^{-4t} \left(e^{(t-3)} - 1 \right)$$

$$= u(t-3) e^{-4t} \left(e^{(t-3)} - 1 \right) = u(t-3) \left(e^{-3} e^{-3t} - e^{-4t} \right)$$

$$\therefore \; y(t) = \frac{1 - e^{-3\cdot(t+2)}}{3} u(t+2) + \left(e^{-3} e^{-3t} - e^{-4t} \right) u(t-3)$$

Λύση 4 (συνέχεια)

Για τη δεδομένη είσοδο, ο μετασχηματισμός Fourier δίνεται από τις:

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega) \Rightarrow u(t+2) \leftrightarrow e^{j2\Omega}\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right]$$

$$e^{-4t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{4+j\Omega} \Rightarrow e^{-4(t-3)}u(t-3) \leftrightarrow \frac{e^{-j3\Omega}}{4+j\Omega}$$

$$\Rightarrow e^{-4t}u(t-3) \leftrightarrow \frac{e^{-j3\Omega-12}}{4+j\Omega}$$

$$w(t) = u(t+2) + e^{-4t}u(t-3) \leftrightarrow e^{j2\Omega}\left[\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)\right] + \frac{e^{-j3\Omega-12}}{4+j\Omega}$$

Λύση 4 (συνέχεια)

$$Y(\Omega) = H(\Omega)W(\Omega) = \frac{1}{3+j\Omega}\left[e^{j2\Omega}\left(\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)\right)+\frac{e^{-j3\Omega-12}}{4+j\Omega}\right]$$

$$= e^{j2\Omega}\left(\underbrace{\frac{1}{3+j\Omega}\cdot\frac{1}{j\Omega}}_{A}+\underbrace{\frac{\pi\delta(\Omega)}{3+j\Omega}}_{B}\right)+e^{-j3\Omega-12}\underbrace{\frac{1}{3+j\Omega}\cdot\frac{1}{4+j\Omega}}_{C}$$

$$A = \frac{1}{3+j\Omega}\cdot\frac{1}{j\Omega} = \frac{1/3}{j\Omega}-\frac{1/3}{3+j\Omega} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{j\Omega}-\frac{1}{3+j\Omega}\right)$$

$$B = \frac{\pi\delta(\Omega)}{3+j\Omega} = \begin{cases} 0, & \Omega \neq 0 \\ \frac{\pi}{3}\delta(0), & \Omega = 0 \end{cases} = \frac{\pi}{3}\delta(\Omega)$$

$$C = \frac{1}{3+j\Omega}\cdot\frac{1}{4+j\Omega} = \frac{1}{3+j\Omega}-\frac{1}{4+j\Omega}$$

Λύση 4 (συνέχεια)

$$\Rightarrow \quad Y(\Omega) = e^{j2\Omega}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{j\Omega} - \frac{1}{3+j\Omega}\right) + \frac{\pi}{3}\delta(\Omega)\right)$$

$$+ e^{-j3\Omega - 12}\left(\frac{1}{3+j\Omega} - \frac{1}{4+j\Omega}\right)$$

$$= \underbrace{e^{j2\Omega}}_{x(t+2)}\frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)}_{u(t)} - \underbrace{\frac{1}{3+j\Omega}}_{e^{-3t}u(t)}\right) + \underbrace{e^{-j3\Omega}}_{x(t-3)}e^{-12}\left(\underbrace{\frac{1}{3+j\Omega}}_{e^{-3t}u(t)} - \underbrace{\frac{1}{4+j\Omega}}_{e^{-4t}u(t)}\right)$$

Λύση 4 (συνέχεια)

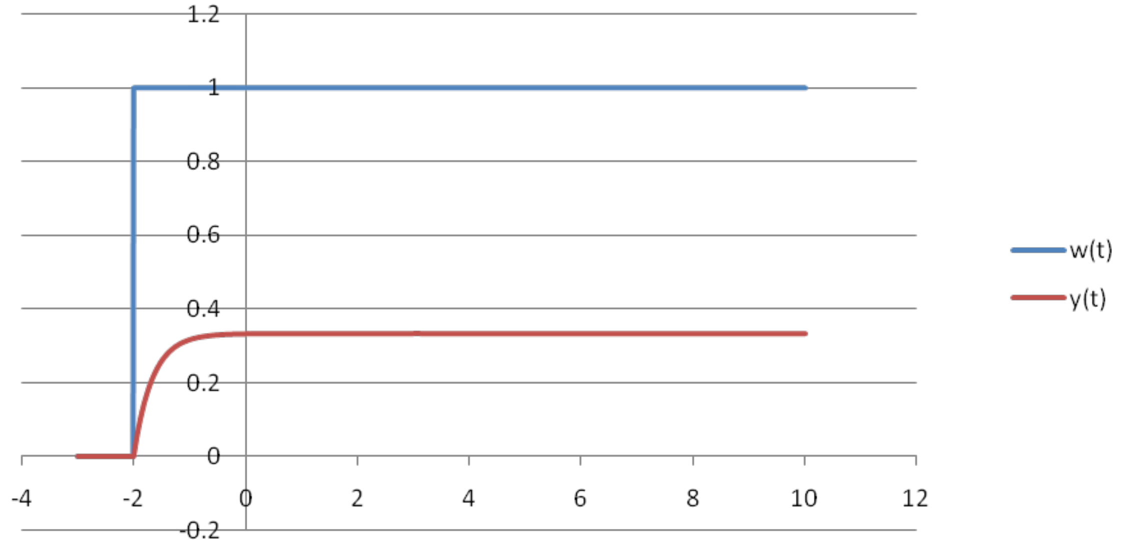
$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{3}\left(u(t+2) - e^{-3(t+2)}u(t+2)\right)$$

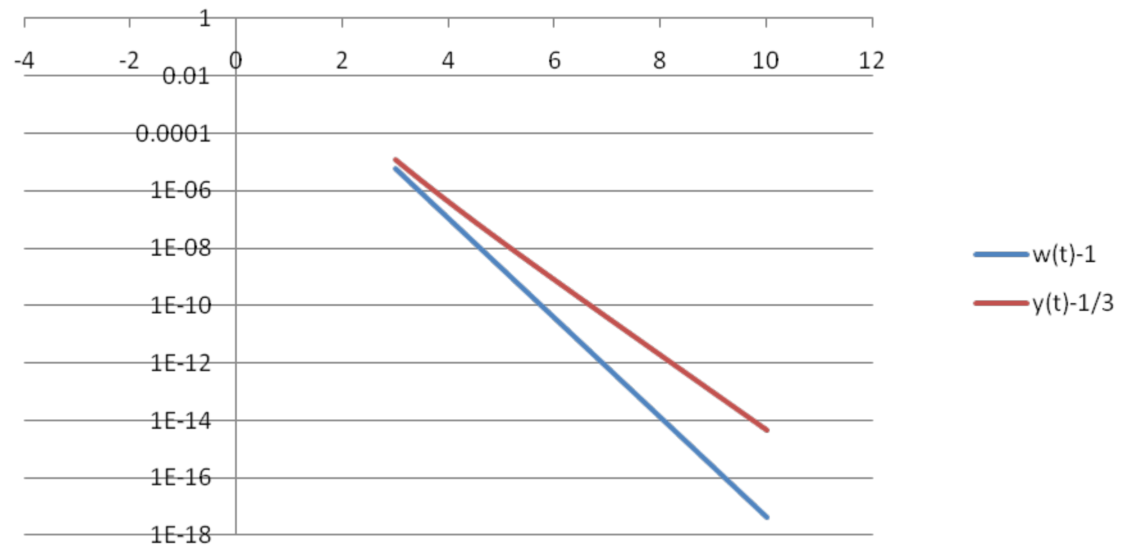
$$+\; e^{-12}\left(e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-4(t-3)}u(t-3)\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3(t+2)}\right)u(t+2) + e^{-12}\left(e^{-3t}e^{9} - e^{-4t}e^{-12}\right)u(t-3)$$

$$\therefore \; y(t) = \frac{1 - e^{-3(t+2)}}{3}u(t+2) + \left(e^{-3}e^{-3t} - e^{-4t}\right)u(t-3)$$

Λύση 4 (συνέχεια)





Άσκηση 5

Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z της συνάρτησης:

$$X(z) = \left(\frac{1 - e^{-z}}{z} \right)^2 \quad \text{με ΠΣ} \quad |z| < \infty$$

Υπενθύμιση: το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της εκθετικής συνάρτησης είναι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Λύση 5

$$X(z) = \left(\frac{1-e^{-z}}{z}\right)^2 = \frac{1-2e^{-z}+e^{-2z}}{z^2}$$

$$= \frac{1}{z^2}\left[1-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2z)^n}{n!}\right]$$

$$= \frac{1}{z^2}\left[1-2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2(-1)^n z^n}{n!}+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n z^n}{n!}\right]$$

$$= \frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2(-1)^n+(-2)^n}{n!}z^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n-2(-1)^n}{n!}z^{n-2}$$

$$= \frac{(-2-2\cdot(-1))}{1!}z^{-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^n-2(-1)^n}{n!}z^{n-2}$$

Λύση 5 (συνέχεια)

$$\Rightarrow \quad X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^{k+2} - 2(-1)^{k+2}}{(k+2)!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}\left[2^{k+2} - 2\right]}{(k+2)!} z^k$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^{-n+2}\left[2^{-n+2} - 2\right]}{(-n+2)!} z^{-n} \Rightarrow \quad x(n) = \frac{(-1)^{-n+2}\left[2^{-n+2} - 2\right]}{(-n+2)!} u(-n)$$

x(0) = (4-2)/2! = 2/2 = 1

x(-1) = -(8-2)/3! = -6/6 = -1

x(-2) = (16-2)/4! = 14/24 = 7/12

x(-3) = -(32-2)/5! = -30/120 = -1/4

Λύση 5 (συνέχεια)