Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων

Ιωάννης Χαρ. Κατσαβουνίδης
Τμήμα Μηχ. Η/Υ, Τηλεπ. & Δικτύων
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
ΦΘινοπωρινό Εξάμηνο 2009/10

Άσκηση 1

Θεωρήστε σύστημα που περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t),\ y(0) = c$$

a) Να υπολογίσετε την απόκριση μηδενικής εισόδου (zero input response) και μηδενικής κατάστασης (zero state response).

b) Για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$ η έξοδος είναι

$$y(t) = \left(\frac{19}{4}e^{-5t} + \frac{1}{4}e^{-t}\right)u(t)$$

Να βρείτε τις τιμές των a, b, c.

Λύση 1

a) Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης του συστήματος, έχουμε:

$$sY(s)-y(0)+aY(s)=bX(s)\Rightarrow(s+a)Y(s)=y(0)+bX(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{y(0)}{s+a}+b\frac{X(s)}{s+a}\Rightarrow Y(s)=\frac{c}{s+a}+b\frac{X(s)}{s+a}$$

Η απόκριση μηδενικής εισόδου υπολογίζεται θέτοντας X(s)=0, οπότε $Y_{ZIR}(s)=\frac{c}{s+a}$

Η απόκριση μηδενικής κατάστασης, θέτοντας y(0)=c=0, οπότε $Y_{ZSR}(s)=\frac{b}{s+a}X(s)$

Λύση 1 (συνέχεια)

b) Όταν $x(t)=e^{-t}u(t)$, $y(t)=\left(\frac{19}{4}e^{-5t}+\frac{1}{4}e^{-t}\right)u(t)$

Συνεπώς

$$X(s)=\frac{1}{s+1}, Y(s)=\frac{19}{4}\frac{1}{s+5}+\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}$$

Από το (a) σκέλος, έχουμε ότι

$$Y(s)=\frac{c}{s+a}+b\frac{X(s)}{s+a}=\frac{c}{s+a}+\frac{b}{(s+a)(s+1)}$$

Λύση 1 (συνέχεια)

Με ανάλυση σε μερικά κλάσματα, παίρνουμε:

$$\frac{b}{(s+a)(s+1)} = \frac{b}{(-1+a)}\frac{1}{s+1} + \frac{b}{(-a+1)}\frac{1}{s+a}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{c}{s+a} + \frac{b}{(-1+a)}\frac{1}{s+1} + \frac{b}{(-a+1)}\frac{1}{s+a}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \left(c - \frac{b}{a-1}\right)\frac{1}{s+a} + \frac{b}{a-1}\frac{1}{s+1}$$

Λύση 1 (συνέχεια)

Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις για το Y(s), έχουμε:

$$Y(s)=\left(c-\frac{b}{a-1}\right)\frac{1}{s+a}+\frac{b}{a-1}\frac{1}{s+1}=\frac{19}{4}\frac{1}{s+5}+\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}$$

$$a=5$$

$$\Rightarrow Y(s)=\left(c-\frac{b}{5-1}\right)\frac{1}{s+5}+\frac{b}{5-1}\frac{1}{s+1}=\frac{19}{4}\frac{1}{s+5}+\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}$$

$$b=1$$

Λύση 1 (συνέχεια)

$$\Rightarrow Y(s) = \left(c - \frac{1}{5-1} \right) \frac{1}{s+5} + \frac{1}{5-1} \frac{1}{s+1} = \frac{19}{4} \frac{1}{s+5} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \left(c - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{s+5} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} = \frac{19}{4} \frac{1}{s+5} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+1}$$

$$c - \frac{1}{4} = \frac{19}{4} \Rightarrow c = \frac{20}{4} = 5$$

$$\therefore \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \\ c = 5 \end{cases}$$

Άσκηση 2

Θεωρήστε ότι δειγματοληπτείται το σήμα $x(t) = e^{-4(\ln 2)t}\cos(2\pi t)u(t)$ με συχνότητα F=8Hz.

a) Να υπολογίσετε το αντίστοιχο σήμα διακριτού χρόνου x(n) και να βρείτε τον μετασχηματισμό Z του (συναρτήσει cos), μαζί με περιοχή σύγκλισης.

b) Να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) του x(n).

Λύση 2

a) Από τον ορισμό της διαδικασίας δειγματοληψίας, $x(n) = x_a(nT)$, όπου T=1/F=1/8. Συνεπώς,

$$x(n) = e^{-4(\ln 2)\frac{n}{8}} \cos\left(2\pi \frac{n}{8}\right) u(n) = \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) u(n)$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) u(n) = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{n} \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) u(n)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n} \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right) u(n)$$

Λύση 2 (συνέχεια)

Από τον πίνακα ζευγών μετασχηματισμού Z,

$$\left(\alpha^n \cos\omega_0 n\right)u(n) \leftrightarrow \frac{z^2 - \alpha\, z\cos\omega_0}{z^2 - 2\alpha\, z\cos\omega_0 + \alpha^2}, \quad \Pi\Sigma : |z| > |\alpha|$$

το οποίο αντιστοιχεί στην ακολουθία που έχουμε για

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

Λύση 2 (συνέχεια)

Συνεπώς,

$$X(z)=\frac{z^2-\frac{1}{\sqrt{2}}z\cos\frac{\pi}{4}}{z^2-2\frac{1}{\sqrt{2}}z\cos\frac{\pi}{4}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2},\quad \Pi\Sigma:|z|>\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|\Rightarrow$$

$$X(z)=\frac{z^2-\frac{1}{\sqrt{2}}z\frac{1}{\sqrt{2}}}{z^2-2\frac{1}{\sqrt{2}}z\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{z^2-\frac{1}{2}z}{z^2-z+\frac{1}{2}},\quad \Pi\Sigma:|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Λύση 2 (συνέχεια)

b) Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier, $X(e^{j\omega})$, ενός σήματος διακριτού χρόνου, $x(n)$, συμπίπτει με το μετασχηματισμό Z, $X(z)$, για $z=e^{j\omega}$, δηλαδή πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, **υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην περιοχή σύγκλισής του.**

Λύση 2 (συνέχεια)

Η περιοχή σύγκλισης στην περίπτωση αυτή είναι |z|>0.707 και συνεπώς περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο.

Συνεπώς,

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{e^{2j\omega}-\frac{1}{2}e^{j\omega}}{e^{2j\omega}-e^{j\omega}+\frac{1}{2}}$$

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας (μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου) των συστημάτων με κρουστική απόκριση:

a)
$$h_1(n)=\begin{cases}1, & |n|=1\\ 2, & n=0\\ 0, & else\end{cases}$$

b)
$$h_2(n)=\begin{cases}1, & n=-1\\ -1, & n=1\\ 0, & else\end{cases}$$

Να σχεδιάσετε το πλάτος των δύο αυτών συναρτήσεων, $|H_1(e^{j\omega})|$, $|H_2(e^{j\omega})|$. Χαρακτηρίστε τα δύο αυτά φίλτρα ως χαμηλοπερατό, υψηλοπερατό ή μεσοπερατό

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Να σχεδιάσετε το πλάτος των δύο αυτών συναρτήσεων, $|H_1(e^{j\omega})|$, $|H_2(e^{j\omega})|$. Χαρακτηρίστε τα δύο αυτά φίλτρα ως χαμηλοπερατό, υψηλοπερατό ή μεσοπερατό.

Ποιο από τα συστήματα αυτά είναι αιτιατά ή/και ευσταθή;

Λύση 3

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, έχουμε:

$$H_1\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_1(n)e^{-j\omega n}=1\cdot e^{j\omega}+2+1\cdot e^{-j\omega}$$

$$=\cos\omega+j\sin\omega+2+\cos\omega-j\sin\omega$$

$$=2\cos\omega+2=2(1+\cos\omega)$$

$$H_2\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_2(n)e^{-j\omega n}=1\cdot e^{j\omega}-1\cdot e^{-j\omega}$$

$$=\cos\omega+j\sin\omega-\cos\omega+j\sin\omega$$

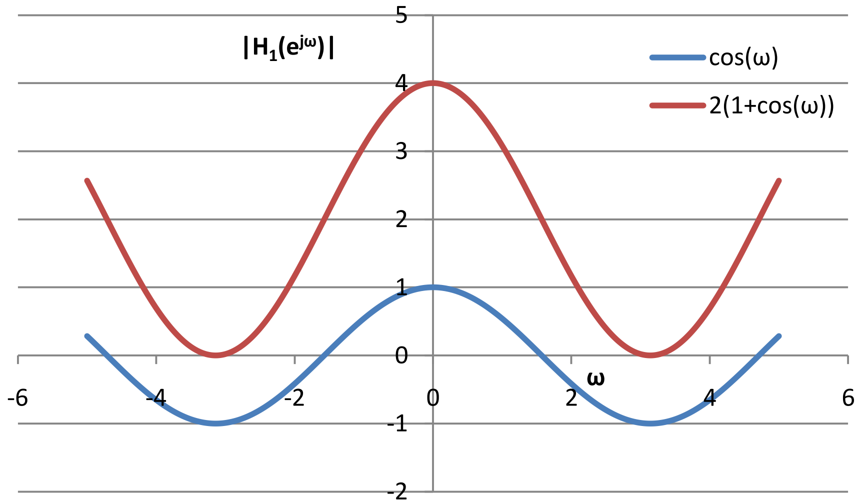
$$=2j\sin\omega$$

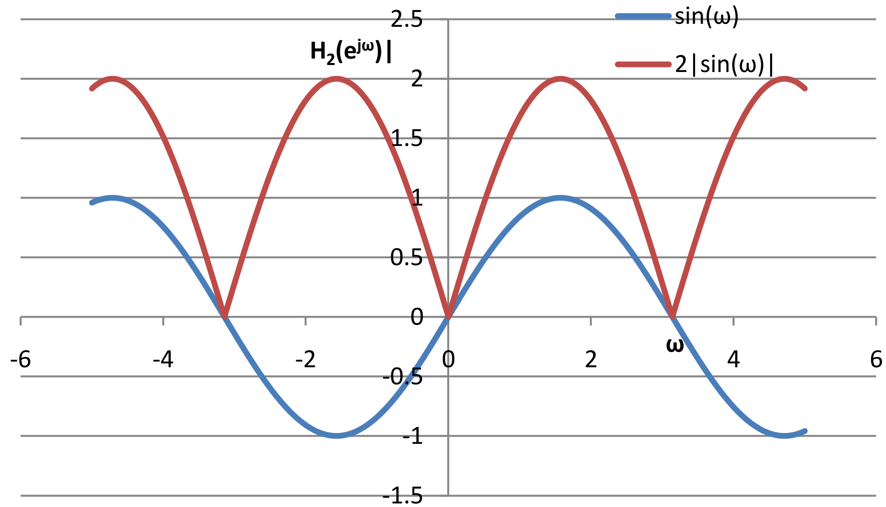
Λύση 3 (συνέχεια)

Το πλάτος των δύο αυτών μιγαδικών συναρτήσεων είναι αντίστοιχα:

$$\left|H_1\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|2\underbrace{\left(1+\cos\omega\right)}_{\geq 0}\right| = 2\left(1+\cos\omega\right) \leftarrow \text{Χαμηλοπερατό}$$

$$\left|H_2\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|2j\sin\omega\right| = 2\left|\sin\omega\right| \leftarrow \text{Μεσοπερατό}$$





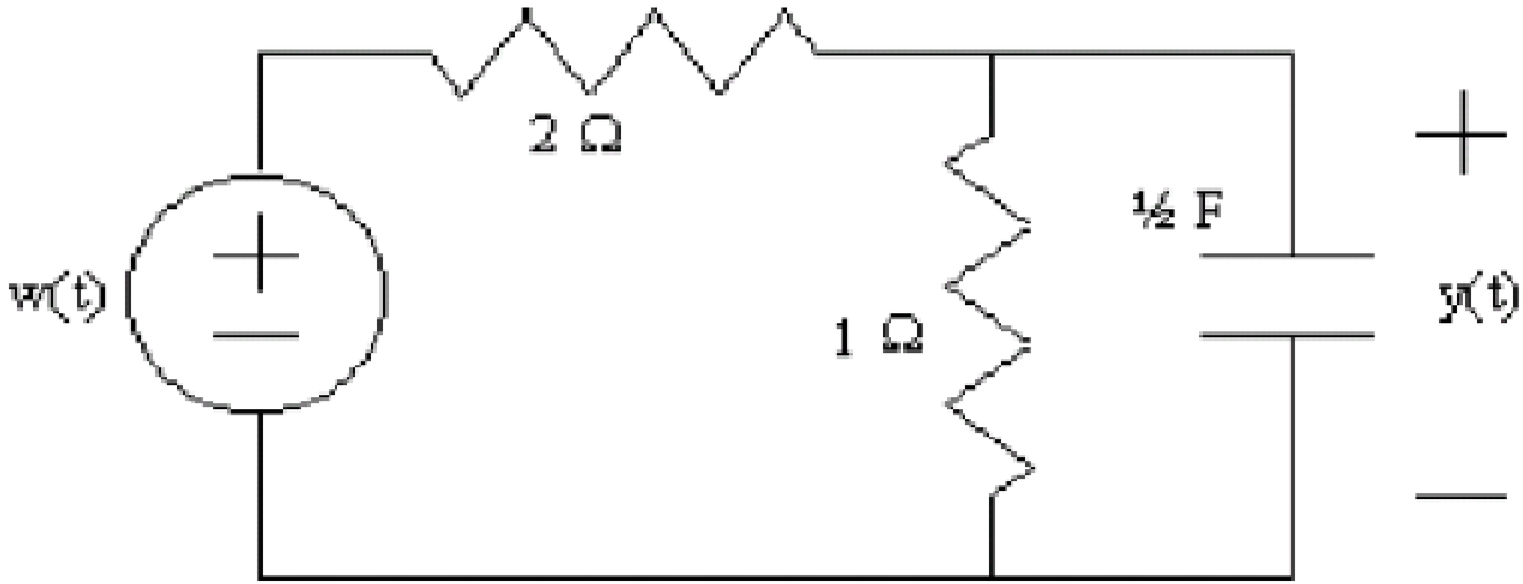
Λύση 3 (συνέχεια)

Παρατηρούμε ότι και τα δύο συστήματα έχουν μη-μηδενικές τιμές για n=-1, και συνεπώς είναι και τα 2 μη αιτιατά.

Επίσης, και τα δύο συστήματα έχουν περιορισμένο πεδίο μη-μηδενικών τιμών και γι’αυτό είναι και τα 2 ευσταθή.

Άσκηση 4

Δίνεται το παρακάτω κύκλωμα:



a) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)=\dfrac{Y(s)}{W(s)}$ και την κρουστική απόκριση h(t)

Άσκηση 4 (συνέχεια)

b) Να υπολογίσετε την έξοδο y(t) του συστήματος για είσοδο

$$w(t) = u(t) + e^{-4(t-1)} u(t-1)$$

και αρχική συνθήκη $y(0^-)=1$ Volt

Λύση 4

Η συνολική αντίσταση που «βλέπει» η πηγή w(t) είναι

$$Z(s) = 2 + \frac{1}{1+0.5s} = \frac{2+s+1}{1+0.5s} = \frac{3+s}{1+0.5s}$$

και το ρεύμα της αντίστασης 2 Ohm είναι

$$I(s) = W(s)\frac{1+0.5s}{3+s}$$

Λύση 4 (συνέχεια)

Η τάση y(t) δίνεται από τη σχέση

$$Y(s) = W(s) - 2I(s) = W(s) - 2W(s)\frac{1+0.5s}{3+s}$$

$$= W(s)\left[1 - 2\frac{1+0.5s}{3+s}\right] = W(s)\frac{3+s-2-s}{3+s}$$

$$= W(s)\frac{1}{3+s} \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{s+3}$$

και η κρουστική απόκριση (μέσω αντίστροφου Laplace): $\Rightarrow h(t) = e^{-3t}u(t)$

Λύση 4 (συνέχεια)

Για τη δεδομένη είσοδο, ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τις:

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$e^{-4t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+4}, \mathrm{Re}(s) > -4$$

$$\Rightarrow e^{-4(t-1)}u(t-1) \leftrightarrow \frac{e^{-s}}{s+4}, \mathrm{Re}(s) > -4$$

$$\therefore w(t) = u(t) + e^{-4(t-1)}u(t-1) \leftrightarrow W(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s+4}, \mathrm{Re}(s) > 0$$

Λύση 4 (συνέχεια)

Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει το κύκλωμα είναι το παρακάτω:

$$2 \cdot i(t) + 1 \cdot i_1(t) = w(t)$$

$$1 \cdot i_1(t) = \frac{1}{0.5} \int_{-\infty}^{t} i_2(\tau) d\tau = y(t)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

όπου i(t) είναι το ρεύμα της αντίστασης 2 Ohm, $i_1(t)$ είναι το ρεύμα της αντίστασης 1 Ohm και $i_2(t)$ είναι το ρεύμα του πυκνωτή.

Λύση 4 (συνέχεια)

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace έχουμε:

$$2I(s)+I_1(s)=W(s)$$

$$I_1(s)=2\left[\frac{I_2(s)}{s}+\frac{\int_{-\infty}^{0} i_2(\tau)d\tau}{s}\right]=Y(s)$$

$$I(s)=I_1(s)+I_2(s)$$

και μας δίνεται ότι $\frac{1}{0.5}\int_{-\infty}^{0} i_2(\tau)d\tau = y(0^-)=1$

Λύση 4 (συνέχεια)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\left(I_1(s)+I_2(s)\right)+I_1(s)=W(s) \\ I_1(s)=2\dfrac{I_2(s)}{s}+\dfrac{1}{s}=Y(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3Y(s)+2I_2(s)=W(s) \\ 2I_2(s)=sY(s)-1 \end{cases} \Rightarrow 3Y(s)+sY(s)-1=W(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{W(s)+1}{s+3}$$

και έχουμε ήδη υπολογίσει ότι

$$W(s)=\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{s+4}, \mathrm{Re}(s)>0$$

Λύση 4 (συνέχεια)

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{\frac{1}{s}+\frac{e^{-s}}{s+4}+1}{s+3}=\frac{1}{s(s+3)}+e^{-s}\frac{1}{(s+3)(s+4)}+\frac{1}{s+3}$$

Ανάλυση σε μερικά κλάσματα:

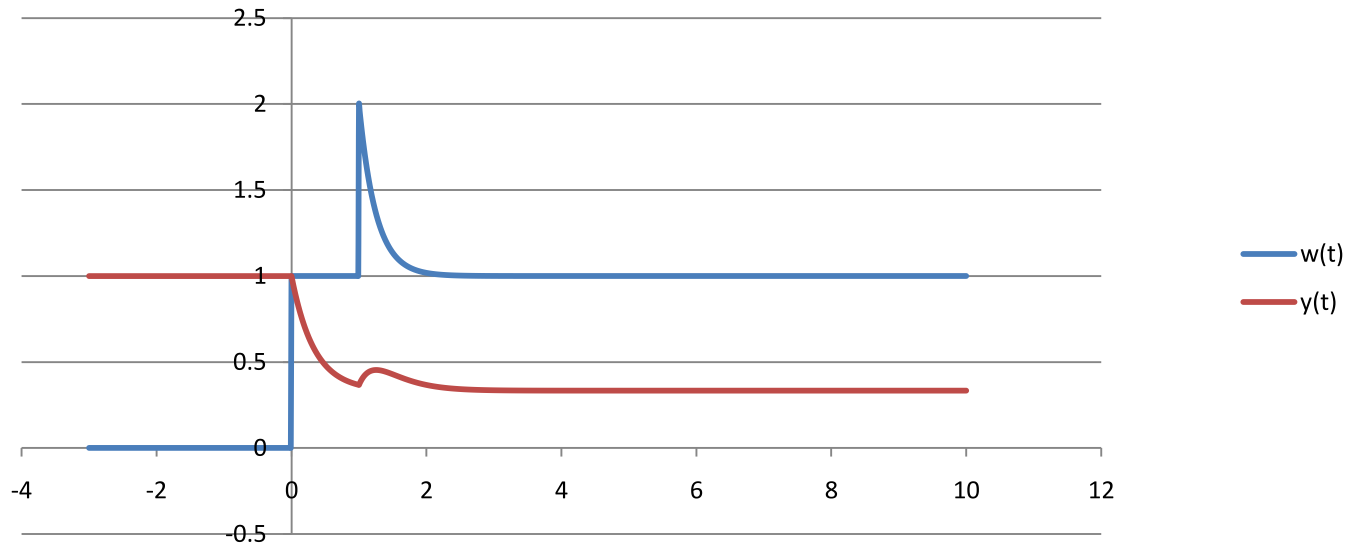
$$\frac{1}{s(s+3)}+\frac{1}{s+3}=\frac{1/3}{s}-\frac{1/3}{s+3}+\frac{1}{s+3}=\frac{1/3}{s}+\frac{2/3}{s+3}$$

$$e^{-s}\frac{1}{(s+3)(s+4)}=e^{-s}\left(\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+4}\right)$$

Λύση 4 (συνέχεια)

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace βασικών συναρτήσεων και την ιδιότητα της ολίσθησης στο χρόνο:

$$y(t)=\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-3t}\right]u(t)+\left[e^{-3(t-1)}-e^{-4(t-1)}\right]u(t-1)$$



Άσκηση 5

Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης:

$$X(s)=\frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)} \quad \text{με ΠΣ} \quad \mathrm{Re}(s)>0$$

Υπενθύμιση: ημιπεριοδική συνάρτηση, ιδιότητα ολοκλήρωσης

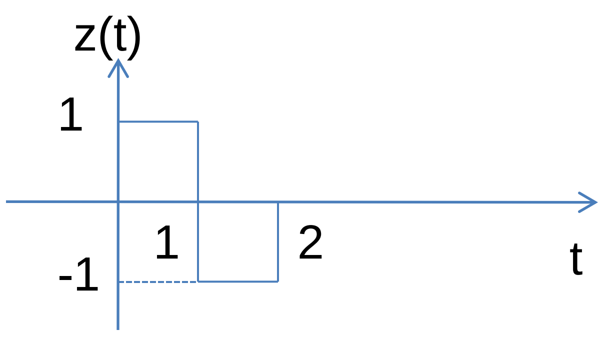
Λύση 5

$$X(s)=\frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}=\frac{Y(s)}{1-e^{-2s}},Y(s)=\frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s^2}$$ Ημιπεριοδική

$$Y(s)=\frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s^2}=\frac{Z(s)}{s},Z(s)=\frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s}$$ Ολοκλήρωμα

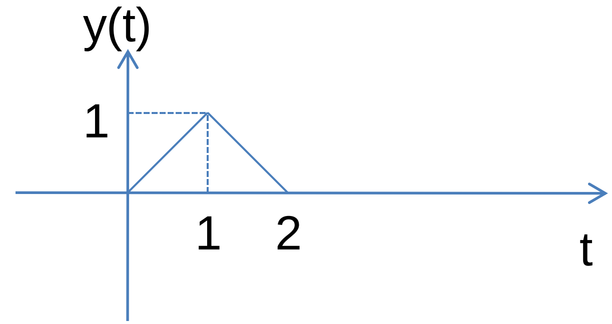
$$Z(s)=\frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s}=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s}=\frac{1}{s}-2e^{-s}\frac{1}{s}+e^{-2s}\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow z(t)=u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$$



Λύση 5 (συνέχεια)

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} z(\tau)\,d\tau = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow x(t) = \begin{cases} x(t+T), & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad x_0(t) = y(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \le t \le 2 \\ 0, & t < 0, t > T \end{cases}$$