ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ - ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ & ΔΙΚΤΥΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ - ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΑΤΣΑΒΟΥΝΙΔΗΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, 15 Σεπτεμβρίου 2011, Διάρκεια: 3 ώρες

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΛΥΣΕΙΣ

ΑΡ. ΦΟΙΤΗΤΙΚΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ/ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ: ΚΑΤΣΑΒΟΥΝΙΔΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

- Αυτή η εξέταση προόδου γίνεται με κλειστά βιβλία/σημειώσεις. Επιτρέπεται να έχετε μαζί σας 2 βοηθητικές σελίδες Α4 (1 κόλλα μπρος-πίσω) με προσωπικές σας σημειώσεις.
- Μην ξεχάσετε να γράψετε το όνομά σας και τον αριθμό φοιτητικής ταυτότητας, όπως επίσης και να αριθμήσετε τις σελίδες που θα παραδώσετε.
- Υπάρχουν δύο μέρη σε αυτή την εξέταση. Το πρώτο μέρος είναι το βασικό.

Μέρος	Μέγιστος αριθμός μονάδων	Ο δικός σας βαθμός
Ι	20	20
ΙΙ	100	~~100~~ 98
Σύνολο	120	~~120~~ 118

Μέρος Ι:

Ιa) (20 μονάδες) Να βρείτε και να σχεδιάσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του:

$$X(\Omega) = j\frac{\pi}{2}p_1(\Omega+1) - j\frac{\pi}{2}p_1(\Omega-1)$$

$$p_{\Omega_0}(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_0 \\ 0 & else \end{cases}$$

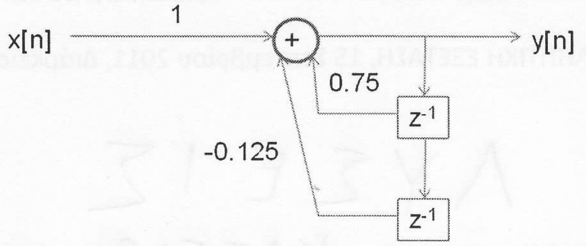
Μέρος ΙΙ:

ΙΙa) (20 μονάδες) Να αναπτύξετε σε εκθετική και τριγωνομετρική σειρά Fourier το παρακάτω περιοδικό σήμα, γνωστό και ως «συρμός δέλτα».

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της εκθετικής σειράς και τις ιδιότητες, να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Fourier του συρμού δέλτα.

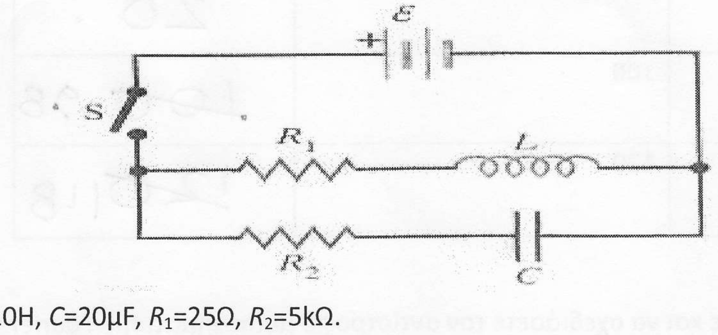
IIb) (20 μονάδες) Εξετάστε αν το παρακάτω σύστημα διακριτού χρόνου είναι γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, αιτιατό και ΦΕΦΕ-ευσταθές:



Υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς, H(z), και την κρουστική απόκριση, h(n).

IIc) (20 μονάδες) Έστω ΓΧΑ αιτιατό σύστημα, με συνεχή κατά τμήματα κρουστική απόκριση x(t), εκθετικής τάξης α για t>0. Να αποδείξετε την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace X(s) και να υπολογίσετε την περιοχή σύγκλισής του. Αν κάνουμε δειγματοληψία της x(t) με συχνότητα 1Hz, ποια είναι η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z της ακολουθίας $x_1(n)$; Αν κάνουμε δειγματοληψία της x(t) με συχνότητα 2Hz, ποια είναι η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z της ακολουθίας $x_2(n)$; Υπό ποιες προϋποθέσεις είναι τα συστήματα x(t), $x_1(n)$ & $x_2(n)$ ΦΕΦΕ-ευσταθή;

IId) (20 μονάδες) Θεωρήστε το παρακάτω ηλεκτρικό κύκλωμα



όπου ε=60V, L=10H, C=20μF, R_1=25Ω, R_2=5kΩ.

Ο διακόπτης S κλείνει τη χρονική στιγμή t=0. Οι αρχικές συνθήκες για το ρεύμα του πηνίου και την τάση του πυκνωτή είναι 0.

a) Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Laplace, να βρείτε εκφράσεις για τα $I_1(s)$ & $i_1(t)$ (ρεύμα του πηνίου) και για τα $I_2(s)$ & $i_2(t)$ (ρεύμα πυκνωτή).
b) Ποιο είναι το αρχικό ρεύμα στους 2 κλάδους; Ποιο είναι το τελικό (για «πολύ» χρόνο); Πόσος είναι αυτός ο «πολύς» χρόνος;
c) Ποια χρονική στιγμή, t, θα είναι ίσα τα ρεύματα i_1 και i_2 (Υπόδειξη: ανάπτυξη σε δυναμοσειρά e^t)

IIe) (20 μονάδες) Η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος διακριτού χρόνου είναι η παρακάτω

$$H(z)=\frac{1-a^*z}{z-a}$$

όπου $|\alpha|$<1 και α* υποδηλώνει το συζυγή μιγαδικό. Ζωγραφίστε στο μιγαδικό επίπεδο τη θέση των πόλων και μηδενικών. Υπό ποιες προϋποθέσεις το σύστημα είναι ΦΕΦΕ-ευσταθές? Ποιο είναι το πλάτος της απόκρισης συχνότητας του διακριτού μετασχηματισμού Fourier;

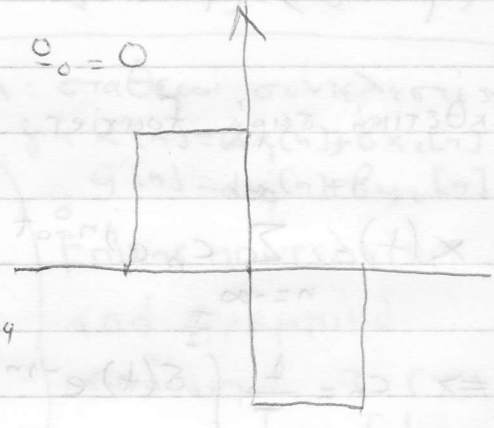
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2011
ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1α) $p_1(\Omega+1) = \begin{cases} 1, & |\Omega+1|<1 \\ 0, & else \end{cases}$ $\quad p_1(\Omega-1) = \begin{cases} 1, & |\Omega-1|<1 \\ 0, & else \end{cases}$

Από πίνακα 2.1,

$$\frac{\sin \Omega_0 t}{\pi t} \xrightarrow{f} \begin{cases} 1, & |\Omega|<\Omega_0 \\ 0, & |\Omega|>\Omega_0 \end{cases}, \text{ για } \Omega_0 = 0$$

$$\frac{\sin t}{\pi t} \xrightarrow{f} \begin{cases} 1, & |\Omega|<1 \\ 0, & |\Omega|>1 \end{cases}$$



Από ιδιότητα Ολίσθηση στη συχνότητα

$$x(t) \longleftrightarrow X(\Omega) \Rightarrow e^{j\Omega_0 t}x(t) \longleftrightarrow X(\Omega-\Omega_0)$$

για $\Omega_0=-1$: $\quad e^{-jt}x(t) \longleftrightarrow X(\Omega+1)$

για $x(t)=\frac{\sin t}{\pi t}$:

$$e^{-jt}\frac{\sin t}{\pi t} \longleftrightarrow \begin{cases} 1, & |\Omega+1|<1 \\ 0, & else \end{cases} = p_1(\Omega+1)$$

για $\Omega_0=+1$: $\quad e^{jt}x(t) \longleftrightarrow X(\Omega-1)$

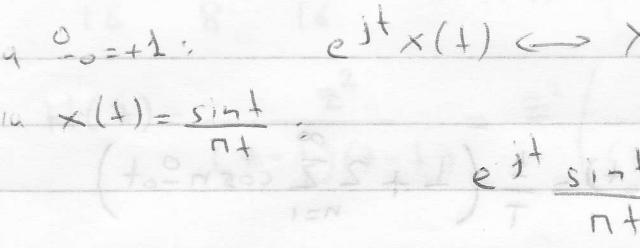
για $x(t)=\frac{\sin t}{\pi t}$:

$$e^{jt}\frac{\sin t}{\pi t} \longleftrightarrow \begin{cases} 1, & |\Omega-1|<1 \\ 0, & else \end{cases} = p_1(\Omega-1)$$

Από ιδιότητα Γραμμικότητας:

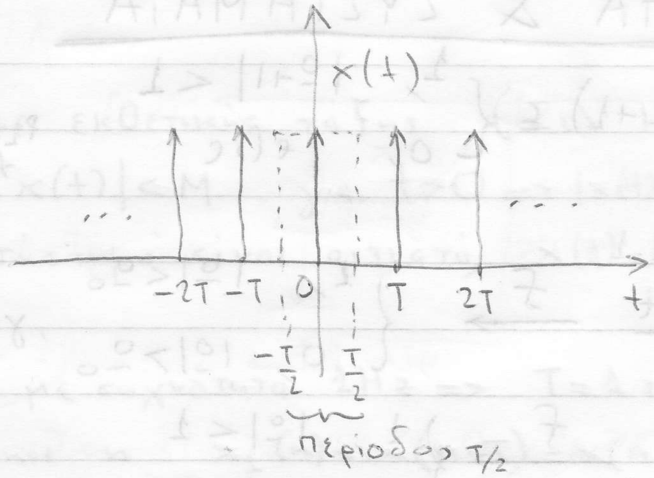
$$j\frac{\pi}{2}p_1(\Omega+1) - j\frac{\pi}{2}p_1(\Omega-1) \longleftrightarrow j\frac{\pi}{2}e^{-jt}\frac{\sin t}{\pi t} - j\frac{\pi}{2}e^{jt}\frac{\sin t}{\pi t} =$$

$$= \frac{j\sin t}{2t}\left(e^{-jt}-e^{jt}\right) = \frac{\sin t}{t}\underbrace{\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}}_{\sin t} = \frac{\sin^2 t}{t}$$



I. Val…

11a) $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$



Περιοδική, περίοδος=T

Εκθετική σειρά fourier:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\Omega_0 t}\ ,\ \Omega_0=\frac{2\pi}{T}\ ,\ c_n=\frac{1}{T}\int x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt$$

$$\Rightarrow c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt=\underbrace{e^{-jn\Omega_0\cdot 0}}_{1}\cdot\frac{1}{T}=\frac{1}{T}$$

Από (2.96)-(2.98),

$$a_0=c_0=\frac{1}{T}\ ,\ a_n=c_n+c_{-n}=\frac{1}{T}+\frac{1}{T}=\frac{2}{T}\ ,\ b_n=j(c_n-c_{-n})=j\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T}\right)=\emptyset$$

Τριγωνομετρική σειρά Fourier:

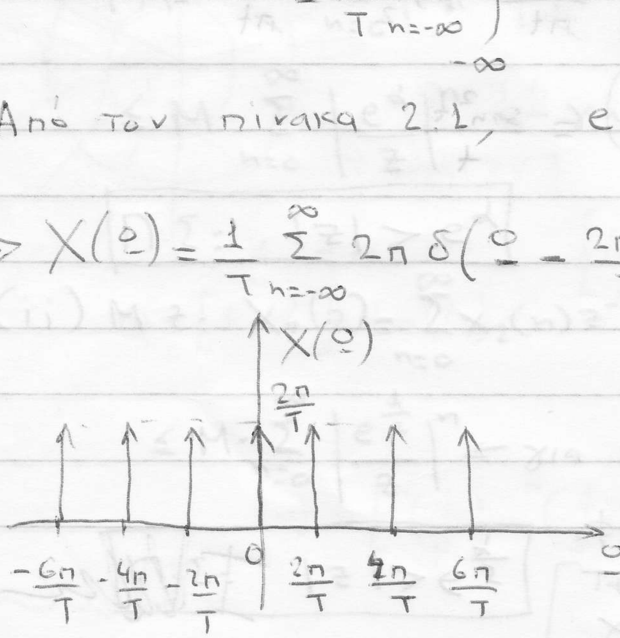
$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega_0 t+b_n\sin n\Omega_0 t)=\frac{1}{T}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\Omega_0 t\right)$$

M.F. $$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\frac{2\pi}{T}t}\right)\cdot e^{-j\Omega t}dt=$$

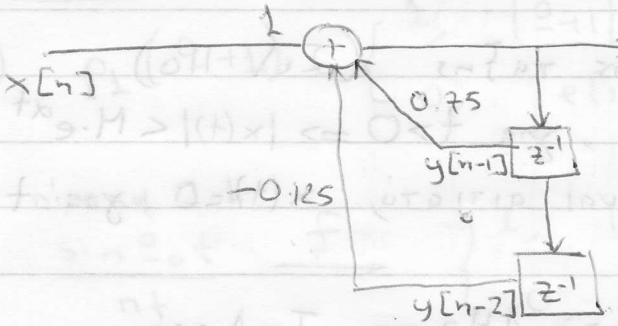
$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\left(\frac{2\pi n}{T}-\Omega\right)t}dt=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}M.F\left\{e^{j\left(\frac{2\pi n}{T}\right)t}\right\}$$

Από τον πίνακα 2.1, $e^{j\Omega_0 t}\longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$

$$\Rightarrow X(\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi\,\delta\left(\Omega-\frac{2\pi n}{T}\right)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi n}{T}\right)$$



11b)



ΑΙΤΙΑΤΟ [Εξαρτάται μόνο από το παρελθόν & παρόν]

$\therefore y[n] = x[n] + 0.75y[n-1] - 0.125y[n-2]$

ΓΧΑ: σταθεροί συντελεστές.
για $x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$
$y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$
Επίσης, αποτελείται από γραμμικό συνδιασμό 3 ΓΧΑ συστημάτων $\left[1, z^{-1}, z^{-1}\right]$
$\Rightarrow$ ΓΧΑ

$\Rightarrow y[n] - 0.75y[n-1] + 0.125y[n-2] = x[n]$

Μ.Ζ.
$\Rightarrow Y(z) - 0.75z^{-1}Y(z) + 0.125z^{-2}Y(z) = X(z)$

$\Rightarrow (1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2})Y(z) = X(z)$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 0.75z + 0.125} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$$

$$\Delta = \frac{9}{16} - \frac{4}{8} = \frac{1}{16} \qquad z_{1,2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} = z^2\left(\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}\right) \underset{\uparrow}{=} z^2\left[\frac{4}{z-\frac{1}{2}} - \frac{4}{z-\frac{1}{4}}\right]$$

μερικά κλάσματα

$$= z\left[\frac{4z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{4z}{z-\frac{1}{4}}\right]$$

2 πόλοι: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

Π.Σ

(Αιτιατό)

Χρονική ολίσθηση κατά $n=-1$

$$\left(4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)\right)$$

$\Rightarrow$ ΦΕΦΕ - ΕΥΣΤΑΘΕΣ

$$\Rightarrow h(n) = 4\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u(n+1) - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}u(n+1)\right]$$

Για $n=-1$,
$h(-1) = 4\left[1-1\right] = 0$

$$\Rightarrow h(n) = 4\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]u(n)$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]u(n) = \left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]u(n)$$

11c) Από τον ορισμό της εκθετικής τάξης (Σελ. 110)

$\exists M>0 : \quad |e^{-\alpha t}x(t)|<M \quad$, για $t>0 \Rightarrow |x(t)|<M\cdot e^{\alpha t}$

Εφόσον το ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό, $x(t)=0$, για $t<0$

(i) Για δειγματοληψία με συχνότητα $1 Hz \Rightarrow T=1$ sec,
η ακολουθία είναι η $x_1(n)=x(n\cdot T)\doteq x(n)$

(ii) Για δειγματοληψία με συχνότητα $2 Hz \Rightarrow T=\frac{1}{2}$ sec,
η ακολουθία είναι η $x_2(n)=x(n\cdot \frac{1}{2})=x(\frac{n}{2})$

Το Θεώρημα ύπαρξης του M.L. (σελ. 110) αποδεικνύει ότι:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \qquad (3.5)$$

$$\left|\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt\right| \le \int_0^\infty |x(t)e^{-st}|dt \le \int_0^\infty |x(t)|\cdot|e^{-st}|dt \le \int_0^\infty M\cdot e^{\alpha t}\cdot e^{-\overset{Re(s)}{\sigma} t}dt$$

Για να υπάρχει το τελευταίο ολοκλήρωμα, πρέπει $\alpha-\sigma<0 \Rightarrow$

$\boxed{Re(s)=\sigma>\alpha \quad (\Pi.\Sigma.)}$

(i) M.Z: $X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\overset{0}{x_1(n)}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x_1(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x_1(n)z^{-n}$

$$\Rightarrow |X_1(z)|\le\sum_{n=0}^{\infty}|x_1(n)||z^{-n}|\le\sum_{n=0}^{\infty}|x(n)||z^{-n}|\le\sum_{n=0}^{\infty}M\cdot e^{\alpha n}|z^{-n}|$$

$\le M\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{e^{\alpha}}{z}\right|^n \leftarrow$ για να είναι $<\infty$, πρέπει $\left|\frac{e^\alpha}{z}\right|<1 \Rightarrow$

$\boxed{\Pi.\Sigma: \quad |z|>e^{\alpha}}$

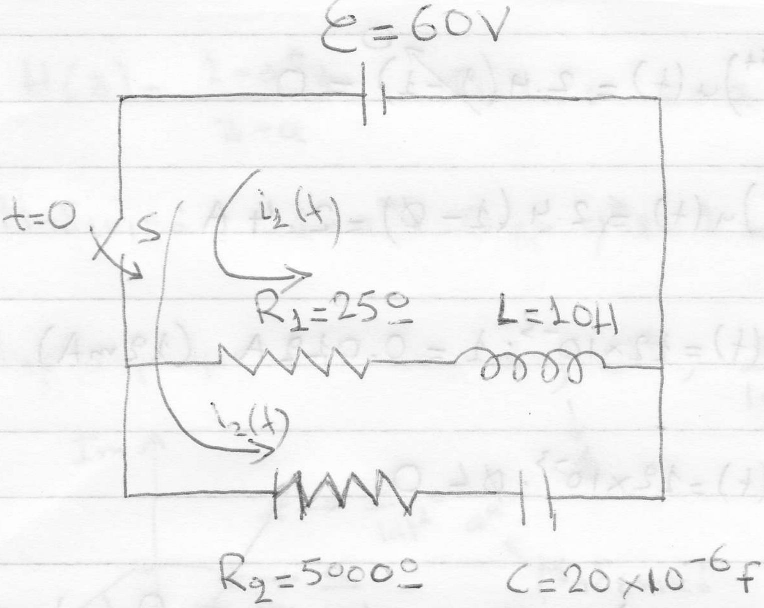
(ii) M.Z: $X_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x_2(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x(\frac{n}{2})z^{-n}\le M.\sum_{n=0}^{\infty}e^{\frac{\alpha n}{2}}\cdot|z^{-n}|$

$\le M\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}}{z}\right|^n \leftarrow$ για να είναι $<\infty$, πρέπει $\left|\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}}{z}\right|<1 \Rightarrow$

$\boxed{\Pi.\Sigma: \quad |z|>e^{\frac{\alpha}{2}}}$ ΦΕΦΕ-Ευσταθή: [Ταυτόχρονα $x(t)$, $x_1[n]$, $x_2[n]$] $\alpha<0 \Rightarrow e^{\alpha}<1 \Rightarrow e^{\frac{\alpha}{2}}<1$

I.K.

11d)



Γράφουμε τις εξισώσεις των δύο βρόγχων:

$$R_1\cdot i_1(t)+L\cdot\frac{di_1(t)}{dt}=\mathcal{E}\cdot u(t)$$

$$R_2\cdot i_2(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)d\tau=\mathcal{E}\cdot u(t)$$

d) Παίρνοντας Μ.L. στις παραπάνω εξισώσεις, έχουμε:

- $R_1\cdot I_1(s)+L\cdot s\cdot I_1(s)-L\cdot \cancelto{0}{i_1(0^-)}=\frac{\mathcal{E}}{s}\Rightarrow I_1(s)=\frac{\mathcal{E}}{s(Ls+R_1)}=\frac{\mathcal{E}/L}{s(s+\frac{R_1}{L})}$

και αντικαθιστώντας τις τιμές των $\mathcal{E}, R_1, L$ παίρνουμε

$I_1(s)=\frac{6}{s\cdot(s+2.5)}$ Έχει δύο πόλους, στο $s=0$ & $s=-2.5$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα, παίρνουμε $I_1(s)=\frac{\frac{6}{0+2.5}}{s}+\frac{\frac{6}{-2.5}}{s+2.5}$

$\Rightarrow I_1(s)=2.4\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2.5}\right]$, Π.Σ: $Re(s)>0$ (αιτιατό σύστημα)

$\Rightarrow i_1(t)=2.4\left(u(t)-e^{-2.5t}u(t)\right)=\underline{\underline{2.4\left(1-e^{-2.5t}\right)u(t)}}$

- $R_2\cdot I_2(s)+\frac{1}{C}\cdot\frac{I_2(s)}{s}+\frac{1}{C}\,\frac{\cancelto{=v_c(0^-)=0}{\int_{-\infty}^{0^-} i_2(\tau)d\tau}}{s}=\frac{\mathcal{E}}{s}\Rightarrow I_2(s)=\frac{\mathcal{E}}{s\left(R_2+\frac{1}{Cs}\right)}=$

$=\frac{\mathcal{E}}{sR_2+\frac{1}{C}}=\frac{\mathcal{E}/R_2}{s+\frac{1}{R_2C}}$ και αντικαθιστώντας τις τιμές των $\mathcal{E}, R_2, C$, παίρνουμε

$I_2(s)=\frac{12\times10^{-3}}{s+10}$ Έχει ένα πόλο στο $s=-10$ Π.Σ: $Re(s)>-10$ (αιτιατό σύστημα)

$\Rightarrow \underline{\underline{i_2(t)=12\times10^{-3}e^{-10t}u(t)}}$

b) $i_1(0^+) = \lim_{t\to 0^+} 2.4(1-e^{-2.5t})u(t) = 2.4(1-1) = 0$

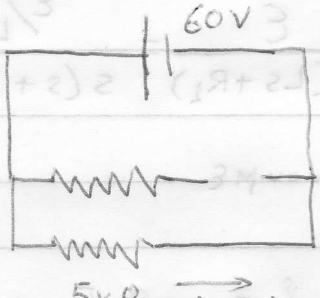
$i_1(\infty) = \lim_{t\to \infty} 2.4(1-e^{-2.5t})u(t) = 2.4(1-0) = 2.4\,A$

$i_2(0^+) = \lim_{t\to 0^+} 12\times10^{-3} e^{-10t} u(t) = 12\times10^{-3}\cdot 1 = 0.012\,A$ (12mA)

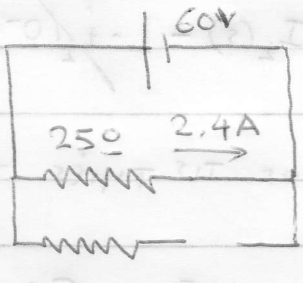
$i_2(\infty) = \lim_{t\to \infty} 12\times10^{-3} e^{-10t} u(t) = 12\times10^{-3}\cdot 0 = 0$

Τα παραπάνω μπορούμε να τα υπολογίσουμε και με τα Θεωρήματα αρχικής-τελικής τιμής, καθώς και με Θεωρία κυκλωμάτων:

$t\to 0^+$



$t\to\infty$



"Πλήρης" χρόνος $\simeq$ 10 σταθερές χρόνου ($\Rightarrow \pm5\times10^{-5}$ τελικής τιμής)

$t_1 = \frac{1}{2.5} = 0.4\,sec \Rightarrow T_1 = 4\,sec$ $\quad t_2 = \frac{1}{10} = 0.1\,sec \Rightarrow T_2 = 1\,sec$

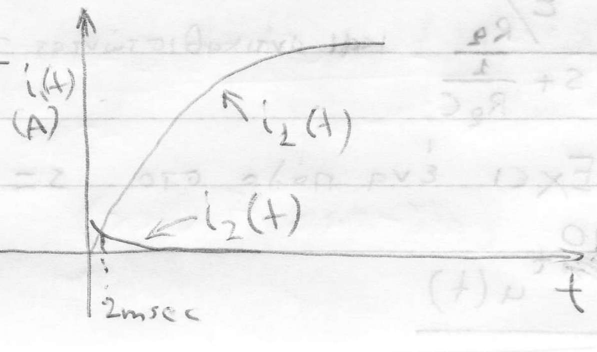
c) $i_1(t) = i_2(t) \Rightarrow 2.4(1-e^{-2.5t}) = 0.012\cdot e^{-10t} \Rightarrow 200(1-e^{-2.5t}) = e^{-10t}$

Σειρά Taylor: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + (...)$ Αν κρατήσουμε 2 όρους

(μόνο για $x \ll 1$) $\quad 200[1-(1-2.5t)] = 1-10t \Rightarrow$

$\Rightarrow 200\cdot 2.5t = 1-10t \Rightarrow 500t + 10t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{510} \simeq 0.00196$

δηλ. $t \simeq 2\,msec$



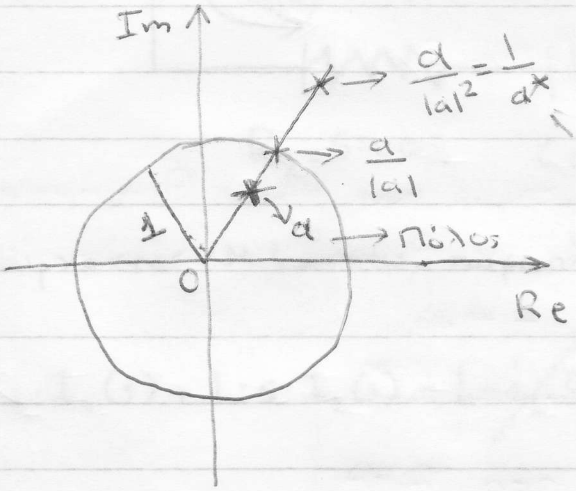
11e) $H(z) = \dfrac{1-a^* z}{z-a}$ Πόλος: $z = a \quad (\in \mathbb{C})$

Μηδενικό: $1 - a^* z = 0 \Rightarrow a^* z = 1 \Rightarrow z = \dfrac{1}{a^*} = \dfrac{a}{a \cdot a^*} = \dfrac{a}{|a|^2}$

Παρατηρούμε ότι αν $a = \rho e^{j\phi}$, $\dfrac{a}{|a|} = e^{j\phi}$ & $\dfrac{a}{|a|^2} = \dfrac{1}{\rho} e^{j\phi}$

$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$

$<1 \qquad\qquad\qquad >1$



Για να είναι το σύστημα ΦΕΦΕ-ευσταθές, πρέπει να περιλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος στην Π.Σ, δηλαδή $|z| > |a|$, συνεπώς το σύστημα να είναι <u>αιτιατό</u>.

(Αν το σύστημα ήταν αντιαιτιατό, η Π.Σ. θα ήταν $|z| < |a|$ και άρα μη ΦΕΦΕ-ευσταθές)

Όταν το σύστημα είναι αιτιατό, το σύστημα έχει DTFT με απόκριση συχνότητας:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - a^*(e^{j\omega})}{(e^{j\omega}) - a} \Rightarrow |H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{(1 - a^* e^{j\omega})(1 - a e^{-j\omega})}{(e^{j\omega} - a)(e^{-j\omega} - a^*)} = \frac{1 - a e^{-j\omega} - a^* e^{j\omega} + |a|^2}{1 - a e^{-j\omega} - a^* e^{j\omega} + |a|^2} = 1$$

$$\Rightarrow |H(e^{j\omega})| = 1$$

(all-pass filter)