Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων

Ιωάννης Χαρ. Κατσαβουνίδης
Τμήμα Μηχ. Η/Υ, Τηλεπ. & Δικτύων
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Φθινοπωρινό Εξάμηνο 2010/11

Άσκηση 1

- Να βρείτε αν τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, αιτιατά και ΦΕΦΕ ευσταθή:

α) $y(t) = \sqrt{x(t)}$

β) $y(t) = x(t)x(t+2)$

γ) $y(t) = 3x(t) + 9$

δ) $y(t) = tx(t)$

Λύση 1

α) $y(t) = \sqrt{x(t)}$

- Γραμμικό: ΟΧΙ

$$x_1(t) = x_2(t) = 1 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t) = 1$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 \Rightarrow y(t) = \sqrt{2} \neq y_1(t) + y_2(t) = 2$$

- Χρονικά αμετάβλητο: ΝΑΙ

$$y(t - t_0) = \sqrt{x(t - t_0)} \quad x'(t) = x(t - t_0) \Rightarrow y'(t) = \sqrt{x(t - t_0)}$$

- Αιτιατό: ΝΑΙ

  (η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου)

Λύση 1 (συνέχεια)

α) $y(t)=\sqrt{x(t)}$ (συνέχεια)

- ΦΕΦΕ ευσταθές: ΝΑΙ

$$\left|x(t)\right|<M \Rightarrow \left|y(t)\right|=\sqrt{x(t)}<\sqrt{M}$$

β) $y(t)=x(t)x(t+2)$

- Γραμμικό: ΟΧΙ

$$x_1(t)=x_2(t)=1 \Rightarrow y_1(t)=y_2(t)=1$$
$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=2 \Rightarrow y(t)=4 \neq y_1(t)+y_2(t)=2$$

Λύση 1 (συνέχεια)

β) $y(t) = x(t)x(t+2)$ (συνέχεια)

- Χρονικά αμετάβλητο: ΝΑΙ

$$y(t-t_0) = x(t-t_0)x(t-t_0+2)$$

$$x'(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y'(t) = x(t-t_0)x(t-t_0+2)$$

- Αιτιατό: ΟΧΙ

(η έξοδος στο χρόνο t εξαρτάται από την είσοδο τη μελλοντική στιγμή t+2)

Λύση 1 (συνέχεια)

β) $y(t) = x(t)x(t+2)$ (συνέχεια)

- Ευσταθές: ΝΑΙ

$$|x(t)| < M \Rightarrow |y(t)| = |x(t)||x(t+2)| < M^2$$

γ) $y(t) = 3x(t) + 9$

- Γραμμικό: ΟΧΙ

$$x(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 9 \neq 0$$

- Χρονικά αμετάβλητο: ΝΑΙ

$$y(t - t_0) = 3x(t - t_0) + 9$$

$$x'(t) = x(t - t_0) \Rightarrow y'(t) = 3x(t - t_0) + 9$$

Λύση 1 (συνέχεια)

γ) $y(t) = 3x(t) + 9$ (συνέχεια)

- Αιτιατό: ΝΑΙ

  (η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου)

- Ευσταθές: ΝΑΙ

  $$|x(t)| < M \Rightarrow |y(t)| = |3x(t) + 9| \le 3M + 9 < 3M + 10$$

δ) $y(t) = tx(t)$

- Γραμμικό: ΝΑΙ

  $$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \Rightarrow y(t) = ta x_1(t) + t\beta x_2(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Λύση 1 (συνέχεια)

δ) $y(t) = tx(t)$ (συνέχεια)

- Χρονικά αμετάβλητο: ΟΧΙ

$$y(t-t_0) = (t-t_0)x(t-t_0) = tx(t-t_0) - \overbrace{t_0 x(t-t_0)}^{\neq 0}$$

$$x'(t) = x(t-t_0) \Rightarrow y'(t) = tx(t-t_0)$$

- Αιτιατό: ΝΑΙ

  (η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου)

- Ευσταθές: ΟΧΙ

$$x(t) = 1 \Rightarrow |y(t)| = |tx(t)| = |t| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$$

Άσκηση 2

Να αναπτύξετε σε εκθετική ή τριγωνομετρική σειρά Fourier το παρακάτω περιοδικό σήμα

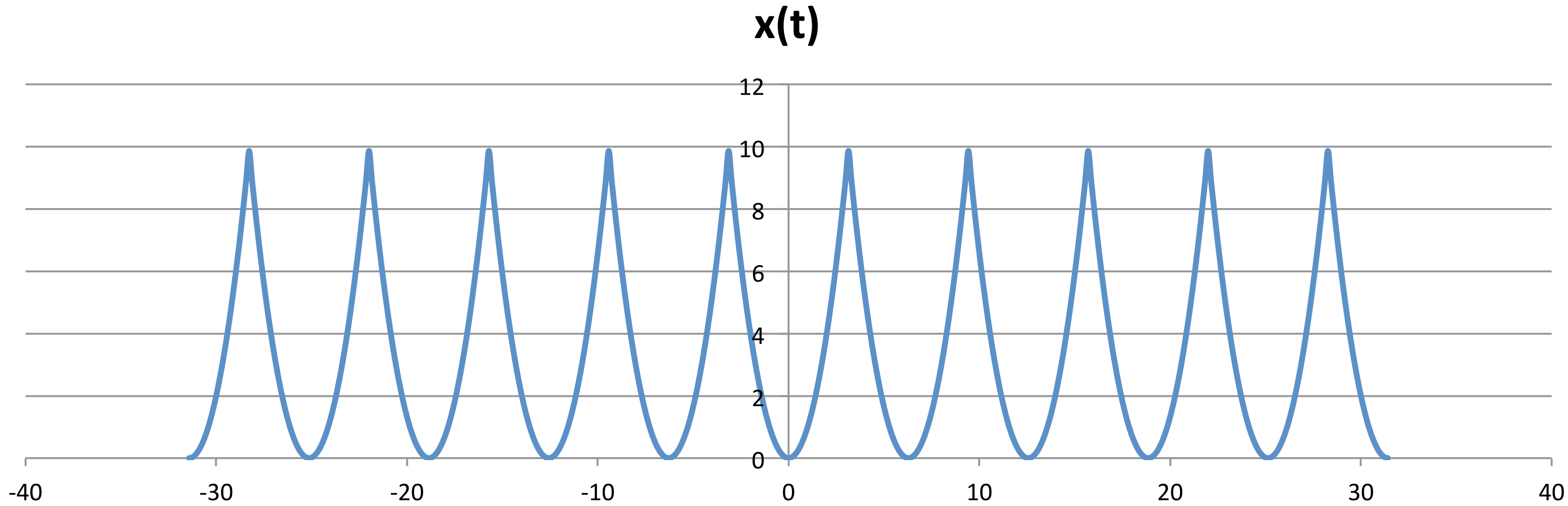
$$x(t+2k\pi)=x(t), \quad \forall k \in Z$$

$$x(t)=t^2, \quad -\pi \le t < \pi$$

Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Parseval για να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

Λύση 2

Το σήμα έχει τη μορφή:



το οποίο είναι άρτια συνάρτηση. Συνεπώς, αναμένουμε η τριγωνομετρική της σειρά να περιέχει μόνο όρους συνημιτόνου (a_n), δηλαδή $b_n=0$, $\forall n \geq 1$.

Λύση 2 (συνέχεια)

Η βασική περίοδος της x(t) είναι 2π, συνεπώς η τριγωνομετρική σειρά έχει θεμελιώδη συχνότητα

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

και οι όροι της τριγωνομετρικής σειράς υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt, \qquad a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos(nt)dt$$

Λύση 2 (συνέχεια)

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(nt)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 d\left(\frac{\sin(nt)}{n}\right) = t^2\frac{\sin(nt)}{n\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}d\left(t^2\right) =$$

$$= 0 - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}2tdt = -\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)dt =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} td\left(\frac{\cos(nt)}{n}\right) = 2t\frac{\cos(nt)}{n^2\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}dt =$$

Λύση 2 (συνέχεια)

$$a_n = \frac{2\pi\cos(n\pi) - 2(-\pi)\cos(-n\pi)}{n^2\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt =$$

$$= \frac{2\pi + 2\pi}{n^2\pi}\cos(n\pi) - \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\left(\frac{\sin(nt)}{n}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{n^2\pi}(-1)^n - \frac{2}{n^3\pi}\sin(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{n^2}(-1)^n - 0 = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi}\frac{t^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^3 + \pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Λύση 2 (συνέχεια)

Το θεώρημα Parseval λέει ότι

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2(t)\,dt$$

Και, αντικαθιστώντας τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$\frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{t^5}{5}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^5}{10\pi} = \frac{\pi^4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} = \frac{4\pi^4}{45} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \cong 1.0823$$

Άσκηση 3

Δίνεται σήμα διακριτού χρόνου x(n) με μετασχηματισμό Z, X(z), και περιοχή σύγκλισης $r_0<|z|<r_1$. Να βρείτε το μετασχηματισμό Z (μαζί με την περιοχή σύγκλισης) του σήματος διακριτού χρόνου $y(n) = 3^n[x(n)+u(n)]$ συναρτήσει του X(z).

Λύση 3

Από την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Ζ,

$$Y(z) = Z\{3^n x(n)\} + Z\{3^n u(n)\}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, παίρνουμε

$$Z\{3^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} 3^n x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} 3^n x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^{-n} x(n)$$

για να συγκλίνει το άθροισμα αυτό, πρέπει το (z/3) να ανήκει στην Π.Σ. του μετασχηματισμού Ζ, δηλαδή $r_0 < \left|\frac{z}{3}\right| < r_1$

Λύση 3 (συνέχεια)

Συνεπώς,

$$Z\left\{3^n x(n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^{-n} x(n) = \mathrm{X}\left(\frac{z}{3}\right) \text{ για } \quad 3r_0 < |z| < 3r_1$$

Επίσης,

$$Z\left\{3^n u(n)\right\} = \frac{z}{z-3} \text{ για } \quad |z| > 3$$

Συνεπώς,

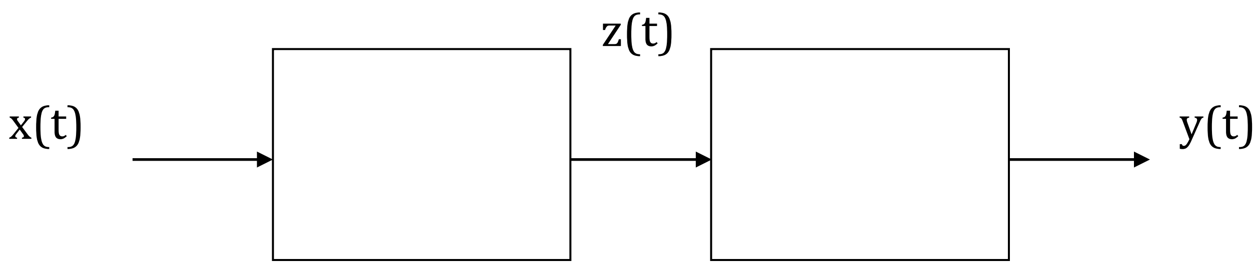
$$Y(z) = Z\left\{3^n x(n)\right\} + Z\left\{3^n u(n)\right\} = \mathrm{X}\left(\frac{z}{3}\right) + \frac{z}{z-3}$$

Με Π.Σ.

$$\max\left\{3r_0, 3\right\} < |z| < 3r_1$$

Άσκηση 4

Έστω το παρακάτω σύστημα, που αποτελείται από 2 επιμέρους υποσυστήματα



τα οποία χαρακτηρίζονται από τις εξής εξισώσεις εισόδου-εξόδου:

$$z(t)=\int_{t-3}^{t} x(\tau)\,d\tau \qquad y(t)=\int_{t-3}^{t} z(\tau)\,d\tau$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

a) Υπολογίστε και σχεδιάστε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος και την συνάρτηση μεταφοράς, Η(Ω).

b) Αποφανθείτε αν το σύστημα είναι αιτιατό ή/ και ΦΕΦΕ ευσταθές.

c) Έστω ότι η είσοδος του συστήματος είναι

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k6)$$

Να υπολογίσετε ή να δώσετε γραφικά την έξοδο του συστήματος.

Λύση 4

a) Από τη σχέση εισόδου εξόδου, παρατηρούμε ότι τα δύο συστήματα είναι πανομοιότυπα (δηλαδή έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς, $h_1(t)$).

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί να γραφτεί ως:

$$z(t) = \int_{t-3}^{t} x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{t-3} x(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-3-\tau)\,d\tau$$

Λύση 4

$$\Rightarrow z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\big(u(t-\tau) - u(t-3-\tau)\big)d\tau$$

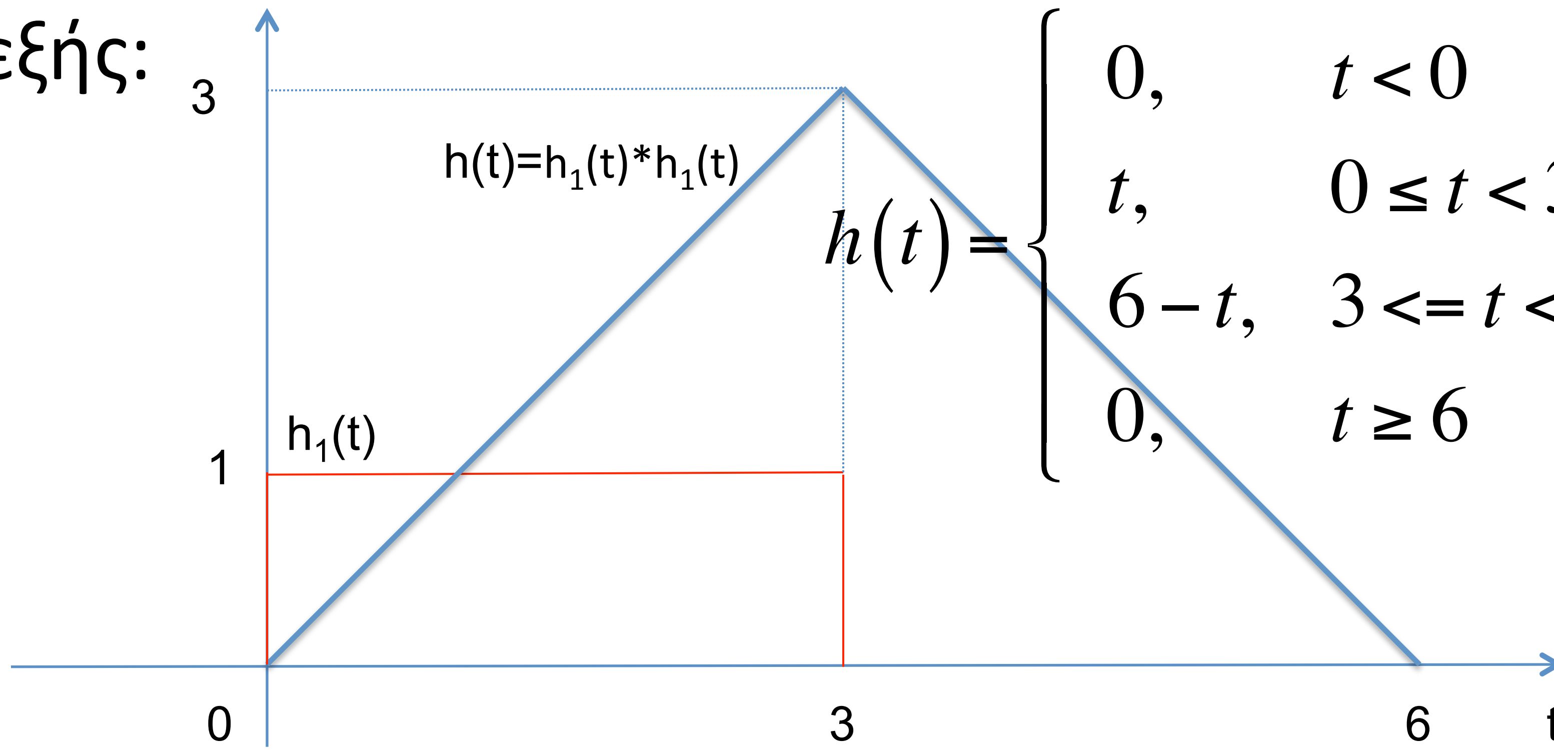
Η παραπάνω είναι η γνωστή σχέση της συνέλιξης της συνάρτησης x(t) με τη συνάρτηση

$$h_1(t) = u(t) - u(t-3) = P_{3/2}\left(t - \frac{3}{2}\right)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση μεταφοράς του καθένα από τα δύο υποσυστήματα είναι ο μοναδιαίος παλμός στο διάστημα [0,3].

Λύση 4 (συνέχεια)

Άρα, η συνολική συνάρτηση μεταφοράς είναι η $h(t)=h_1(t)*h_1(t)$, δηλαδή η συνέλιξη δύο παλμών με εύρος 3, η οποία δίνει ένα τριγωνικό παλμό με βάση 6 και ύψος 3, ως εξής:



$$h(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ t, & 0 \le t < 3 \\ 6-t, & 3 <= t < 6 \\ 0, & t \ge 6 \end{cases}$$

Λύση 4 (συνέχεια)

Από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier και τους μετασχηματισμούς Fourier βασικών σημάτων, έχουμε

$$P_{3/2}(t) \leftrightarrow 3\frac{\sin\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\frac{3\Omega}{2}} \Rightarrow P_{3/2}\left(t-\frac{3}{2}\right) \leftrightarrow e^{-\frac{j3\Omega}{2}} 3\frac{\sin\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\frac{3\Omega}{2}}$$

Και από την ιδιότητα της συνέλιξης,

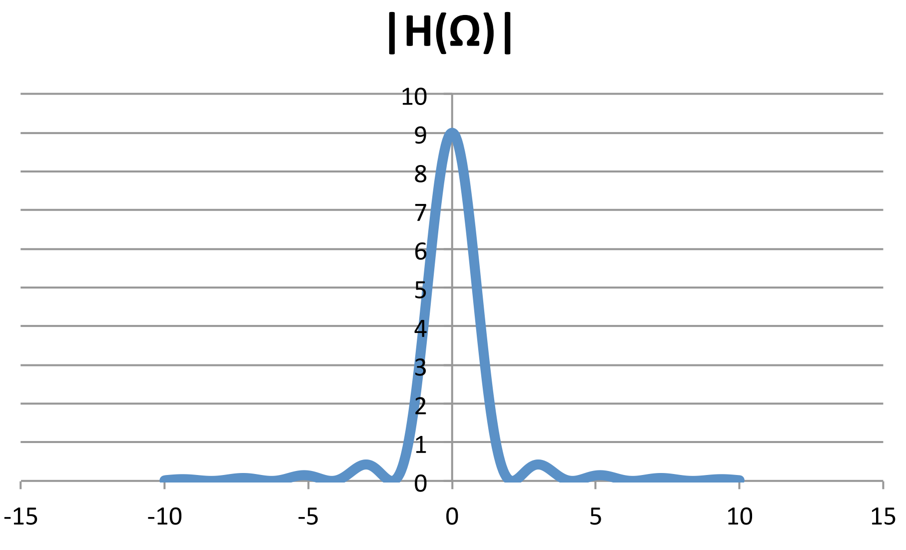
$$h(t) = P_{3/2}\left(t-\frac{3}{2}\right) * P_{3/2}\left(t-\frac{3}{2}\right) \leftrightarrow H(\Omega) = e^{-2\frac{j3\Omega}{2}} 9\frac{\sin^2\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\frac{9\Omega^2}{4}}$$

Λύση 4 (συνέχεια)

Το πλάτος του μετασχηματισμού Fourier υπολογίζεται και δίνεται γραφικά παρακάτω

$$\left|H(\Omega)\right| = \left| e^{-2\frac{j3\Omega}{2}} 9 \frac{\sin^2\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\frac{9\Omega^2}{4}} \right| = \left| e^{-2\frac{j3\Omega}{2}} \right| \left| 9 \frac{\sin^2\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\frac{9\Omega^2}{4}} \right|$$

$$= 9 \left| \frac{\sin^2\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\frac{9\Omega^2}{4}} \right|$$



Λύση 4 (συνέχεια)

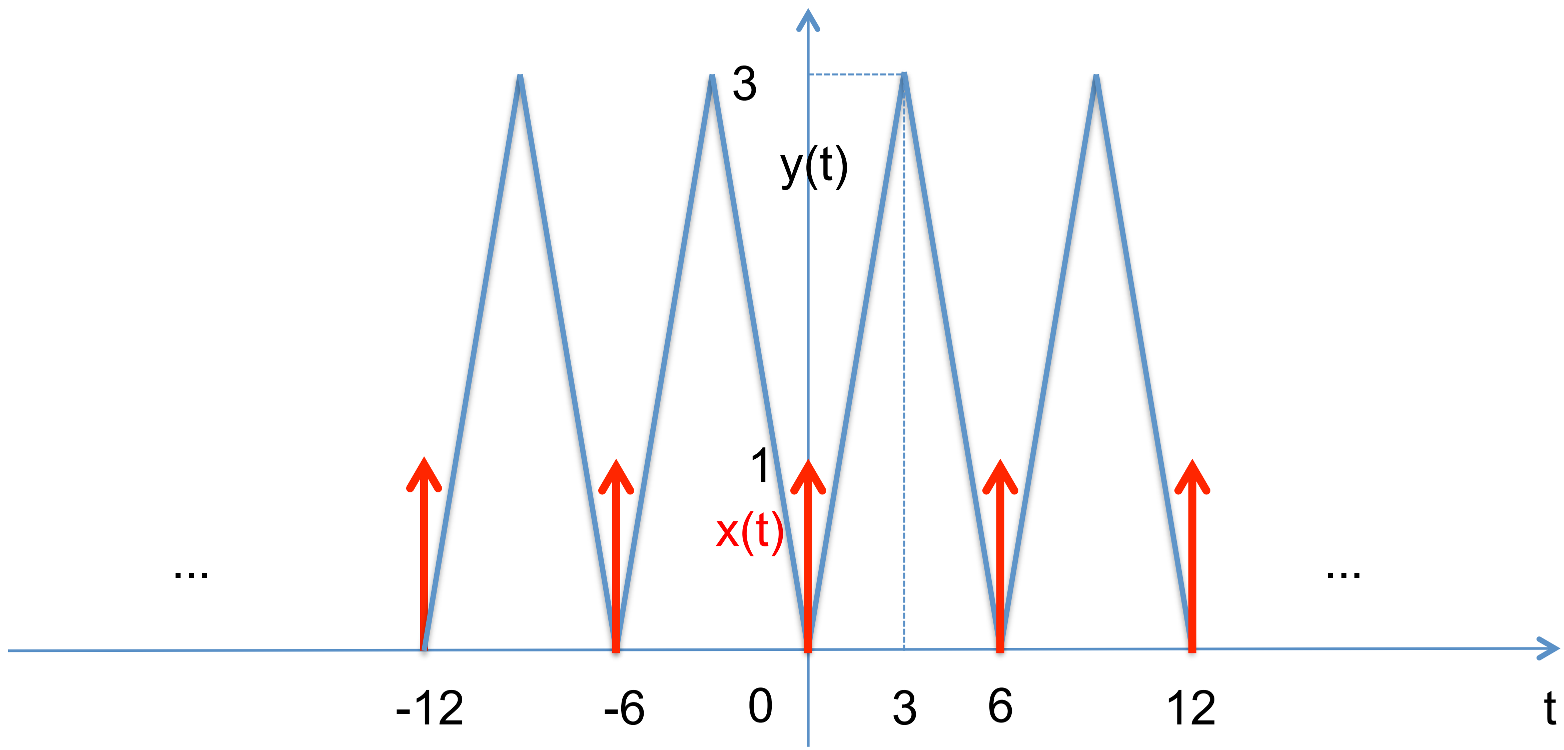
b) Εφόσον η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι αιτιατό σήμα ($h(t)=0$, για $t<0$), συνεπώς το σύστημα είναι αιτιατό.

Εφόσον η κρουστική απόκριση είναι απολύτως ολοκληρώσιμη (περιορισμένου πλάτους και εύρους), συνεπώς είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

Κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο, αφού κάθε ένα από τα επιμέρους υποσυστήματα είναι αιτιατό και ΦΕΦΕ ευσταθές.

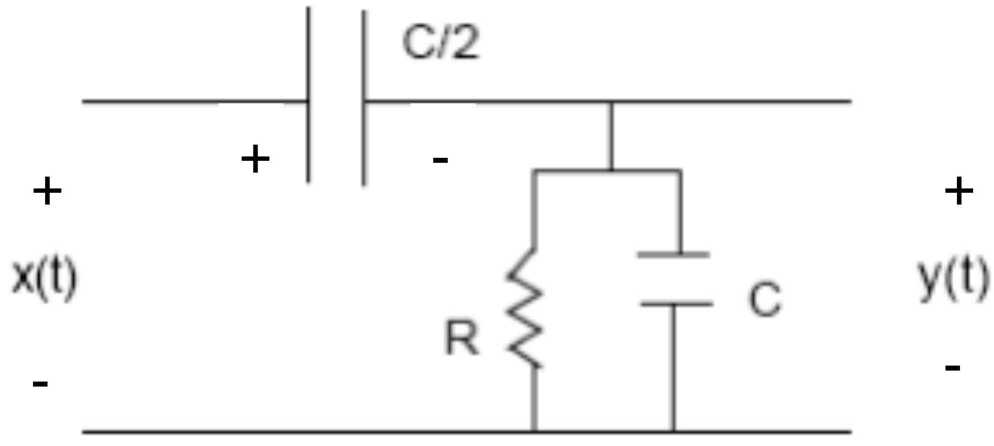
Λύση 4 (συνέχεια)

c) Το σήμα εισόδου είναι το παρακάτω και με απλή συνέλιξη με τον τριγωνικό παλμό, έχουμε το παρακάτω σήμα εξόδου (περιοδικός τριγωνικός παλμός)



Άσκηση 5

Θεωρήστε το παρακάτω ηλεκτρικό κύκλωμα



a) Να βρείτε τη διαφορική εξίσωση ανάμεσα στην είσοδο (τάση x(t)) και την έξοδο (τάση y(t))

Άσκηση 5 (συνέχεια)

b) Για R=1kΩ, $C=10^{-5}$F, να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, H(s)

c) Να βρείτε την έξοδο y(t) για είσοδο $x(t)=e^{-t}u(t)$ και αρχικές συνθήκες $v_c(0) = 1V$, $v_{c/2}(0) = 2V$

Λύση 5

Ξεκινάμε από τις εξισώσεις του κυκλώματος:

$$\left.\begin{aligned}
&y(t) = i_R(t)R = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\,d\tau \\
&x(t) = \frac{2}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau + y(t) \\
&i(t) = i_R(t) + i_C(t)
\end{aligned}\right\}$$

Και στη συνέχεια απαλοίφουμε τα 3 ρεύματα

Λύση 5 (συνέχεια)

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= i_R(t)R = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\,d\tau \\ x(t) &= \frac{2}{C}\int_{-\infty}^{t}\big(i_R(\tau)+i_C(\tau)\big)\,d\tau + y(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= i_R(t)R = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\,d\tau \\ x(t) &= \frac{2}{RC}\int_{-\infty}^{t} i_R(\tau)R\,d\tau + 2\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\,d\tau + y(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Λύση 5 (συνέχεια)

$$x(t)=\frac{2}{RC}\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau+2y(t)+y(t)\Rightarrow$$

$$x(t)=\frac{2}{RC}\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau+3y(t)\Rightarrow$$

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{2}{RC}y(t)+3\frac{dy(t)}{dt}$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην παραπάνω διαφορική εξίσωση, παίρνουμε

$$sX(s)-x(0^-)=\frac{2}{RC}Y(s)+3sY(s)-3y(0^-)$$

Λύση 5 (συνέχεια)

b) Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς, θεωρούμε ότι όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν, και έτσι η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$sX(s) = \frac{2}{RC}Y(s) + 3sY(s) \Rightarrow$$

$$sRCX(s) = (2 + 3RCs)Y(s) \Rightarrow$$

$$RC = 10^3 \cdot 10^{-5} = 0.01\sec$$

$$\mathrm{H}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{sRC}{2 + 3RCs} \Rightarrow \mathrm{H}(s) = \frac{0.01s}{2 + 0.03s}$$

Λύση 5 (συνέχεια)

c) Για να βρούμε την έξοδο του συστήματος με είσοδο την $x(t)=e^{-t}u(t)$ και αρχικές συνθήκες $v_c(0) = 1V$, $v_{c/2}(0) = 2V$, ξεκινάμε και πάλι από τη διαφορική εξίσωση του κυκλώματος και παρατηρούμε ότι, $x(0^-)=v_c(0)+v_{c/2}(0)=1V+2V=3V$.

Επίσης, $y(0^-)=v_c(0)=1V$.

$$x(t)=e^{-t}u(t)\Rightarrow X(s)=\frac{1}{s+1},\mathrm{Re}(s)>-1$$

$$sX(s)-x(0^-)=\frac{2}{RC}Y(s)+3sY(s)-3y(0^-)$$

Λύση 5 (συνέχεια)

Συνεπώς, έχουμε

$$\frac{s}{s+1} - 3 = \frac{2}{0.01} Y(s) + 3sY(s) - 3 \Rightarrow$$

$$\frac{s}{s+1} = 200Y(s) + 3sY(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{s}{(s+1)(3s+200)}$$

Το οποίο με ανάλυση σε απλά κλάσματα μας δίνει

$$Y(s) = \frac{1}{3}\frac{s}{(s+1)(s+200/3)} = \frac{1}{3}\left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+200/3}\right]$$

Λύση 5 (συνέχεια)

$$A=\frac{-200/3}{-200/3+1}=\frac{-200/3}{-197/3}=\frac{200}{197}$$

$$B=\frac{-1}{-1+200/3}=\frac{-3}{-3+200}=\frac{-3}{197}$$

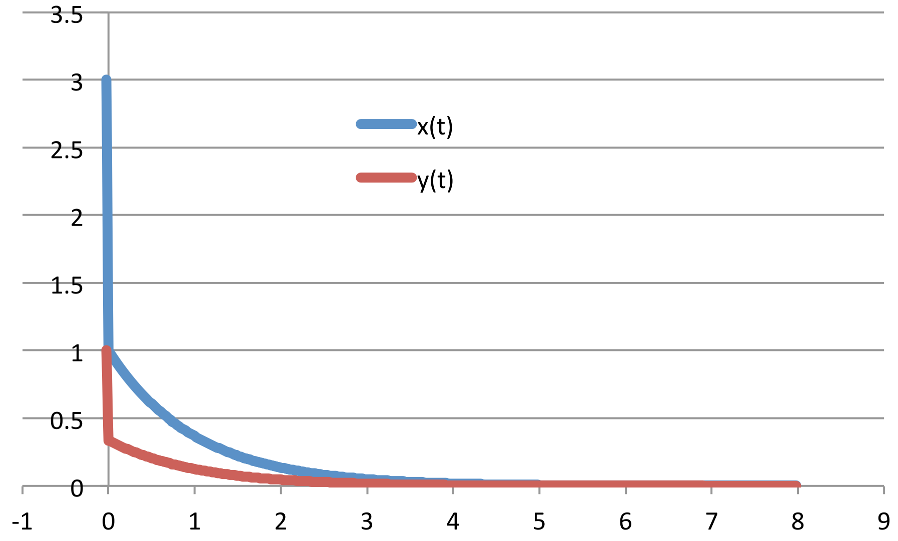
$$Y(s)=\frac{200}{591}\frac{1}{s+1}-\frac{3}{591}\frac{1}{s+200/3}$$

Αντιστρέφοντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς Laplace, παίρνουμε

$$y(t)=\left(\frac{200}{591}e^{-t}-\frac{3}{591}e^{-\frac{200}{3}t}\right)u(t)$$

Λύση 5 (συνέχεια)

Οι γραφικές παραστάσεις των x(t) & y(t) είναι οι εξής:



Αξίζει να προσέξουμε την ασυνέχεια, τόσο στην x(t) (3->1) όσο και στην y(t) (1->1/3) στο t=0, το οποίο είναι αποτέλεσμα του βρόγχου πυκνωτών

Άσκηση 6

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός αιτιατού συστήματος διακριτού χρόνου είναι η παρακάτω

$$H(z) = \frac{z^2 + \frac{1}{4}z}{z^2 - z + \frac{1}{4}}$$

Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση του συστήματος. Είναι το σύστημα ΦΕΦΕ-ευσταθές?

Άσκηση 6 (συνέχεια)

Να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι το σήμα

$$e^{j\frac{\pi}{4}n} = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

Λύση 6

Εφόσον μας δίνεται ότι το σύστημα είναι αιτιατό, γνωρίζουμε ότι η Π.Σ. του μετασχηματισμού Ζ είναι το εξωτερικό ενός κύκλου. Υπολογίζουμε πρώτα τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς

$$H(z)=\frac{z^2+\frac{1}{4}z}{z^2-z+\frac{1}{4}}=z\frac{z+\frac{1}{4}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Λύση 6 (συνέχεια)

Δηλαδή, το σύστημα έχει ένα διπλό πόλο στο z=1/2 και η Π.Σ. είναι |z|>0.5.

Για να αντιστρέψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς, προχωρούμε σε ανάπτυξη σε απλά κλάσματα

$$H(z) = z\frac{z+\frac{1}{4}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} = z\left[\frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

Λύση 6 (συνέχεια)

Όπου τα A και B υπολογίζονται κατά τα γνωστά:

$$A = \left.\frac{d\left(z+\frac{1}{4}\right)}{dz}\right|_{z=\frac{1}{2}} = 1, B = z+\left.\frac{1}{4}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow H(z) = z\left[\frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{4}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}\right] = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\frac{\frac{1}{2}z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Λύση 6 (συνέχεια)

Αντιστρέφοντας τους 2 όρους, παίρνουμε:

$$h(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{3}{2} n \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$= \left(1 + \frac{3}{2} n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Εφόσον η Π.Σ. περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

Λύση 6 (συνέχεια)

Εφόσον το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές, ο μετασχηματισμός Fourier, $H(e^{j\omega})$, της κρουστικής απόκρισης υπάρχει και δίνεται από την:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{j2\omega} + \frac{1}{4}e^{j\omega}}{e^{j2\omega} - e^{j\omega} + \frac{1}{4}} = e^{j\omega}\frac{e^{j\omega} + \frac{1}{4}}{\left(e^{j\omega} - \frac{1}{2}\right)^{2}}$$

Λύση 6 (συνέχεια)

Το σήμα εισόδου που δίνεται είναι εκθετικό μιγαδικό, της μορφής

$e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$ για ω=π/4.

Συνεπώς, η έξοδος του συστήματος θα είναι

$y(n) = e^{j\omega n} H\left(e^{j\omega}\right)$ για ω=π/4, δηλαδή

$$y(n) = e^{j\frac{\pi}{4}n} H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right) = e^{j\frac{\pi}{4}n} \underbrace{\frac{e^{j\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} e^{j\frac{\pi}{4}}}{e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{j\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}}}_{\frac{24-11\sqrt{2}+j\left(8-19\sqrt{2}\right)}{66-40\sqrt{2}} \cong 2.192\angle -65.9^\circ}$$