Λυμένες Ασκήσεις – Σετ 4°

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί ο ML του σήματος $x(t) = e^{-at}\, u(t)$, όπου a μιγαδικός αριθμός.

Λύση Άσκησης 1

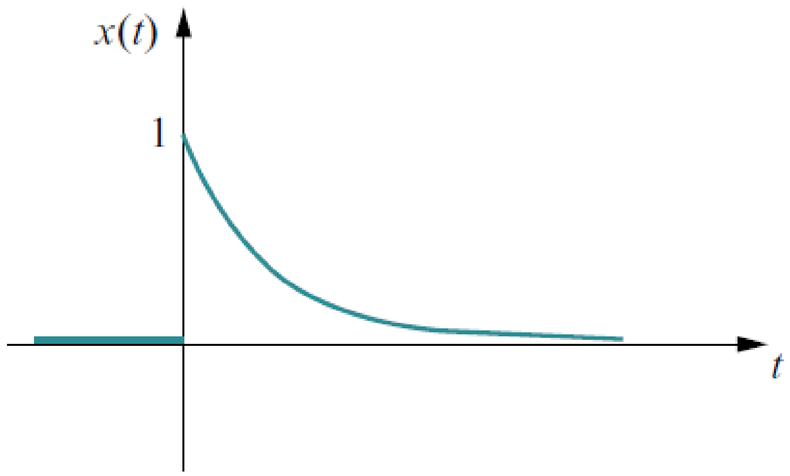
Από τον ορισμό του ML έχουμε

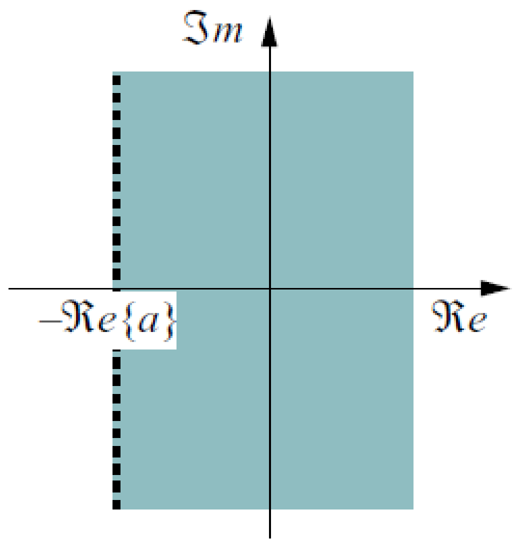
$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T} e^{-at} e^{-st} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{-1}{a+s}\left[e^{-(a+s)T} - 1\right] \qquad (5.5)$$

Αλλά $\lim_{T\to\infty} e^{-(a+s)T} = 0$, εάν $\Re e\{a+s\} > 0$, συνεπώς παίρνουμε

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{για} \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\} \qquad (5.6)$$

Παρατηρούμε ότι η *περιοχή σύγκλισης R του μιγαδικού αιτιατού εκθετικού σήματος είναι το δεξιό ημιεπίπεδο με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση* $-\Re e\{a\}$





Άσκηση 2

Να υπολογιστεί ο ML του σήματος $x(t) = -\,e^{-at}u(-t)$

Λύση Άσκησης 2

Ο ML του σήματος είναι

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt = -\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{0} e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}\left[1 - \lim_{T\to-\infty} e^{(s+a)T}\right]$$

Είναι $\lim_{T\to-\infty} e^{(s+a)T} = 0$ για $\Re e\{s+a\} < 0$. Συνεπώς

$$X(s) = \frac{1}{s+a}$$

με πεδίο σύγκλισης $\Re e\{s+a\} < 0$ ή $\Re e\{s\} < -\Re e\{a\}$. *Η περιοχή σύγκλισης R του αυστηρά μη αιτιατού εκθετικού σήματος είναι το αριστερό ημιεπίπεδο με σύνορο τη γραμμή που είναι κάθετη στον πραγματικό άξονα στη θέση* $-\Re e\{a\}$

Παρατηρούμε ότι τα σήματα $x(t) = e^{-at}u(t)$ και $x(t) = e^{-at}u(-t)$ έχουν την ίδια συνάρτηση ως ML, *αλλά διαφορετική περιοχή σύγκλισης*. Για το λόγο αυτό, πάντα εκτός από την $X(s)$ θα πρέπει να δίνεται και η αντίστοιχη περιοχή σύγκλισης, ώστε να προσδιορίζεται *μονοσήμαντα* το σήμα $x(t)$.

Άσκηση 3

Δίνεται το σήμα $x(t) = e^{-b|t|}$ b πραγματικός αριθμός. Να υπολογιστεί ο ML.

Λύση Άσκησης 3

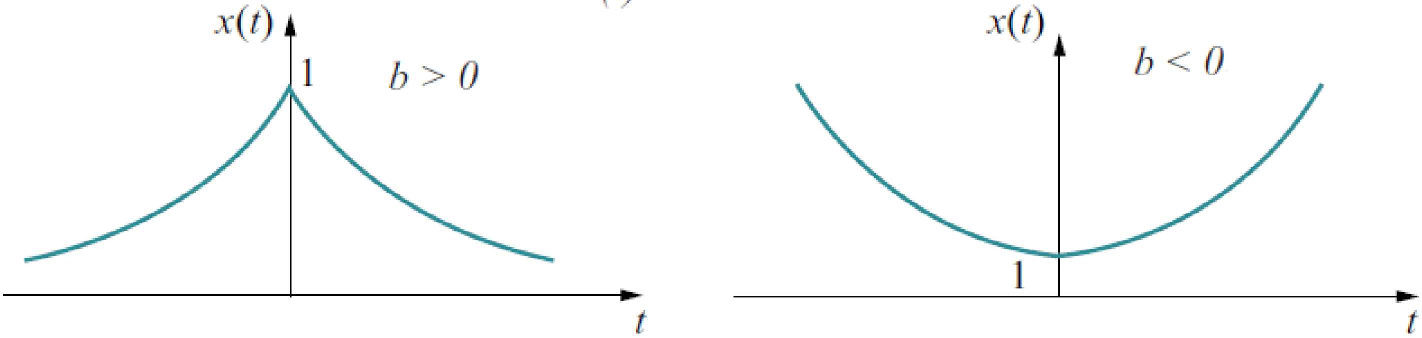
Το σήμα γράφεται $x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$

Γνωρίζουμε ότι

$$e^{-bt}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+b} \quad \text{με ΠΣ} \quad \Re e\{s\} > -b$$

$$e^{bt}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{-1}{s-b} \quad \text{με ΠΣ} \quad \Re e\{s\} < b$$

$x(t) = e^{-b|t|}$



Παρατηρούμε ότι, αν $b < 0$, οι δύο επιμέρους όροι δεν έχουν κοινή περιοχή σύγκλισης και το σήμα $x(t)$ δεν έχει ML. Αν $b > 0$ έχουμε

$$e^{-b|t|} \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = -\frac{2b}{s^2 - b^2} \quad \text{με} \ -b < \Re e\{s\} < +b$$

<u>Άσκηση 4</u>

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος ML των συναρτήσεων

$$\alpha)\ X(s) = \frac{1}{s^2+9}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

$$\beta)\ X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}, \quad \Re e\{s\} > -2$$

<u>Λύση Άσκησης 4</u>

$$\alpha)\ X(s) = \frac{1}{s^2+9}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

Από τον πίνακα των στοιχειωδών συναρτήσεων, έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{\sin(3t)u(t)\} = \frac{3}{s^2+9}, \quad \Re e\{s\} > 0$$

οπότε η ζητούμενη συνάρτηση θα είναι η

$$x(t) = \frac{1}{3}\sin(3t)u(t)$$

<u>Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει και με ανάλυση σε απλά κλάσματα.</u>

$\beta)\ X(s) = \dfrac{s+1}{s^2+5s+6}, \quad \Re e\{s\} > -2$

Αναλύοντας τη ρητή συνάρτηση σε απλά κλάσματα παίρνουμε

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

όπου

$$A = (s+2)X(s)\big|_{s=-2} = -1$$
$$B = (s+3)X(s)\big|_{s=-3} = 2$$

Επομένως, αφού $\Re e\{s\} > -2$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+3}\} = (-e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

Άσκηση 5

Θεωρείστε ένα ΓΧΑ σύστημα στο οποίο εφαρμόζεται το σήμα εισόδου $x(t) = e^{-t}u(t)$ **και το οποίο έχει κρουστική απόκριση** $h(t) = e^{-2t}u(t)$

$\alpha)$ Υπολογίστε τους μετασχηματισμούς Laplace των $x(t),\ h(t)$

$\beta)$ Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης βρείτε το ML $Y(s)$ της εξόδου $y(t)$

$\gamma)$ Από το ML $Y(s)$ καθορίστε την έξοδο $y(t)$

Λύση Άσκησης 5

$\alpha)$ έχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re e\{s\} > -1$$

και $$H(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \Re e\{s\} > -2$$

$$\beta)\ Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}, \quad \Re e\{s\} > -1$$

γ) Αναλύουμε το $Y(s)$ σε απλά κλάσματα, οπότε αρχικά, το γράφουμε στη μορφή

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

όπου

$$A = (s+1)Y(s)\big|_{s=-1} = 1$$
$$B = (s+2)Y(s)\big|_{s=-2} = -1$$

'Αρα, ο ML γράφεται ως

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

και επομένως

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

Άσκηση 6

Δίνεται η παρακάτω ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) + 2\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = u(t), \ \ t \geq 0$$

όπου $u(t)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση, με αρχικές συνθήκες $x(0-) = 2$, $\int_{-\infty}^{0-} x(t)dt = 0$.

Με τη χρήση του Μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί η λύση της εξίσωσης.

Λύση Άσκησης 6

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μετασχηματισμού για παραγώγιση και ολοκλήρωση έχουμε ότι

$$sX(s) - x(0-) + 3X(s) + 2\frac{[X(s) + \phi(0-)]}{s} = \frac{1}{s}$$

αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες και λύνοντας ως προς $X(s)$ καταλήγουμε

$$X(s) = \frac{1+2s}{s^2+3s+2} = \frac{1+2s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

Αφού πρόκειται για αιτιατό σήμα, έχουμε ότι το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού είναι $\mathrm{Re}\{s\} > \max\{-1, -2\} = -1$. Για να βρούμε τη $x(t)$, αφού ο αντίστροφος Laplace της συνάρτησης $\frac{1}{s-a}$ είναι $e^{at}u(t)$, συμπεραίνουμε ότι $x(t) = (3e^{-2t} - e^{-t})u(t)$.