Λυμένες Ασκήσεις – Σετ 3ο

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι το παρακάτω σήμα είναι περιοδικό μόνο όταν $\Omega_0/2\pi$ είναι ρητός αριθμός.

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

Λύση Άσκησης 1

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} e^{j\Omega_0 N} = e^{j\Omega_0 n}$$

άρα $e^{j\Omega_0 N} = 1$

$$\Omega_0 N = m2\pi$$

$m =$ θετικός ακέραιος

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \text{ είναι ρητός}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και για τα σήματα $\cos(\Omega_0 n)$ και $\sin(\Omega_0 n)$.

Άσκηση 2

Ποια από τα παρακάτω σήματα είναι περιοδικά;

(α) $x[n] = e^{j(\pi/4)n}$

(β) $x[n] = \cos \frac{1}{4}n$

(γ) $x[n] = \cos \frac{\pi}{3}n + \sin \frac{\pi}{4}n$

(δ) $x[n] = \cos^2 \frac{\pi}{8}n$

Λύση Άσκησης 2

(α) περιοδικό, $N_0=8$

(β) μη περιοδικό

(γ) περιοδικό, $N_0=24$

(δ) περιοδικό, $N_0=8$

Παρακάτω δίνεται πιο αναλυτικά η λύση του (δ).

$$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta),$$

$$x[n] = \cos^2\frac{\pi}{8}n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}n = x_1[n] + x_2[n]$$

- $x_1[n] = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1)^n \quad N_1 = 1$
- $x_2[n] = \frac{1}{2}\cos(\pi/4)n = \frac{1}{2}\cos\Omega_2 n \longrightarrow \Omega_2 = \pi/4.$
  $N_2 = 8$
- $N_0 = 8$

Άσκηση 3

Αν η απόκριση ενός γραμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος στη μοναδιαία βηματική ακολουθία είναι

$$s(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

να βρεθεί η κρουστική απόκριση, $h(n)$.

Λύση Άσκησης 3

Αρχικά παρατηρούμε ότι $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

Συνεπώς, λόγω γραμμικότητας, η κρουστική απόκριση $h(n)$ συνδέεται με τη βηματική απόκριση $s(n)$, ως εξής

$$h(n) = s(n) - s(n-1)$$

Άρα, δεδομένης της $s(n)$, έχουμε

$$\begin{aligned} h(n) &= s(n) - s(n-1) \\ &= n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) \\ &= \left[n\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n-1) \\ &= (2-n)\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1) \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθεί η Π.Σ. του Μ.Ζ. της δεξιόπλευρης (right–sided) εκθετικής ακολουθίας $x_1(n) = a^n u(n)$.

Λύση Άσκησης 4

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του Μ.Ζ. έχουμε:

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

με Π.Σ. $|az^{-1}|<1$ ή ισοδύναμα $|z| > |a|$.

Άσκηση 5

Να υπολογισθεί η Π.Σ. της αριστερόπλευρης (left–sided) εκθετικής ακολουθίας

$$x_2(n) = -a^n u(-n-1).$$

Λύση Άσκησης 5

Από τον ορισμό του Μ.Ζ. έχουμε:

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(-n-1) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n$$

Για $|a^{-1}z| < 1$ ή ισοδύναμα $|z| < |a|$ το άθροισμα συγκλίνει δίνοντας:

$$X_2(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

με Π.Σ. $|z| < |a|$

Άσκηση 6

Υπολογίστε τον Μ.Ζ. (και την Π.Σ.) του σήματος:

$$x[n] = a^{-n}u[-n-1]$$

Λύση Άσκησης 6

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{-n}u[-n-1]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (az)^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (az)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az)^{n} - 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (az)^{n} = \frac{1}{1-az} \qquad \text{αν} |az| < 1 \ \text{ή} \ |z| < \frac{1}{|a|}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az} - 1 = \frac{az}{1-az} = -\frac{z}{z-1/a} \qquad |z| < \frac{1}{|a|}$$

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί η Π.Σ. της αμφίπλευρης (two–sided) εκθετικής ακολουθίας $x(n) = a^{|n|}$, $a > 0$.

Λύση Άσκησης 7

Η ακολουθία $x(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο άλλων ακολουθιών, μιας δεξιόπλευρης και μιας αριστερόπλευρης, ως εξής:

$$x(n) = a^{n}u(n) + a^{-n}u(-n-1)$$

ή

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

Από τα προηγούμενα παραδείγματα γνωρίζουμε ότι οι Μ.Ζ. των παραπάνω ακολουθιών είναι:

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{για } |z| > a$$

$$X_2(z) = \frac{-1}{1 - a^{-1}z^{-1}} \quad \text{για } |z| < a^{-1}$$

Ο Μ.Ζ. $X(z)$ της αμφίπλευρης ακολουθίας ισούται με το άθροισμα των Μ.Ζ. των επιμέρους ακολουθιών (βλ. ιδιότητα γραμμικότητας άρα:

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

ή $$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{1}{1 - a^{-1}z^{-1}}, \qquad a < |z| < a^{-1}$$

ή $$X(z) = \frac{a^2 - 1}{a} \frac{z}{(z-a)(z-a^{-1})}, \qquad a < |z| < a^{-1}$$

Είναι φανερό ότι για να υπάρχει κοινό τμήμα (επικάλυψη) μεταξύ των δύο περιοχών σύγκλισης, θα πρέπει $a < 1$. Για $a > 1$ δεν υπάρχει επικάλυψη των περιοχών σύγκλισης και έτσι δεν θα έχει Μ.Ζ., παρόλο που οι επιμέρους ακολουθίες που την απαρτίζουν (αριστερόπλευρη και δεξιόπλευρη) από μόνες τους έχουν!

<u>Άσκηση 8</u>

Βρείτε τον Μ.Ζ. των παρακάτω σημάτων:

$$(a) \quad x[n] = (\tfrac{1}{2})^n u[n] + (\tfrac{1}{3})^n u[n]$$

$$(b) \quad x[n] = (\tfrac{1}{3})^n u[n] + (\tfrac{1}{2})^n u[-n-1]$$

$$(c) \quad x[n] = (\tfrac{1}{2})^n u[n] + (\tfrac{1}{3})^n u[-n-1]$$

Λύση Άσκησης 8

$$(a)\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z|>\frac{1}{3}$$

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{z}{z-\frac{1}{3}}=\frac{2z\left(z-\frac{5}{12}\right)}{\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$$(b)\quad \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z|>\frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \longleftrightarrow -\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|<\frac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{6}\,\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \qquad \frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$$

$$(c)\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \longleftrightarrow -\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z|<\frac{1}{3}$$

Βλέπουμε ότι οι Π.Σ. δεν επικαλύπτονται και επομένως ο ΜΖ δεν υπάρχει.