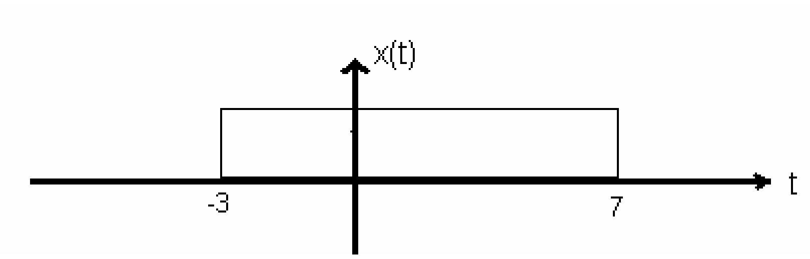
Λυμένες Ασκήσεις – Σετ 2ο

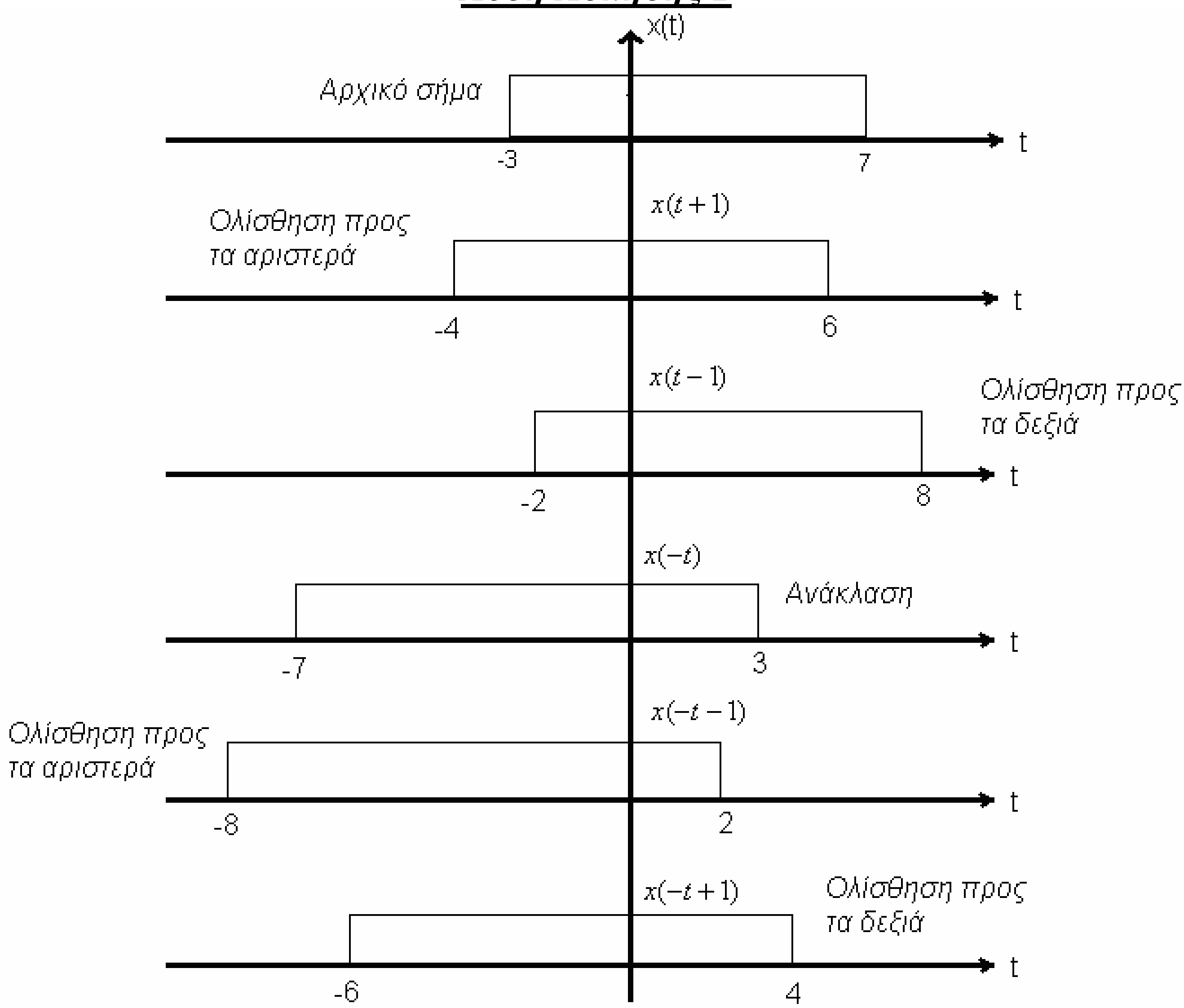
Άσκηση 1

Αν το x(t) είναι το παρακάτω σήμα, να σχεδιάσετε τα σήματα

$x(t+1),\ \ x(t-1),\ \ x(-t),\ \ x(-t+1),\ \ x(-t-1)$



Λύση Άσκησης 1



Προσέξτε πως στην περίπτωση του $x(t-1)$ έχουμε μετατόπιση του σήματος x(t) προς τα δεξιά ενώ στην περίπτωση του $x(-t-1)$ έχουμε μετατόπιση του σήματος x(-t) προς τα αριστερά. *(Για ποιον λόγο συμβαίνει αυτό;)*

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί, η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος που έχει κρουστική απόκριση

$$h(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t\le 1\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

αν η είσοδός του είναι το σήμα

$$x(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 2\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

Υπενθύμιση βημάτων συνέλιξης

Για να υπολογίσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

για κάθε χρονική στιγμή t, ακολουθούμε τα βήματα:

1ο Βήμα: *Ανάκλαση.* Αντιστρέφουμε την κρουστική απόκριση, δηλαδή προσδιορίζουμε την $h(-\tau)$.

2ο Βήμα: *Χρονική Μετατόπιση.* Μετατοπίζουμε την $h(-\tau)$ κατά t και έτσι προσδιορίζουμε την $h(t-\tau)$.

3ο Βήμα: *Πολλαπλασιασμός.* Προσδιορίσουμε το γινόμενο $x(\tau)\cdot h(t-\tau)$.

4ο Βήμα: *Ολοκλήρωση ή Εμβαδομέτρηση.* Ολοκληρώνουμε το γινόμενο αυτό (ή υπολογίζουμε το εμβαδό του σήματος που δημιουργείται από τη γραφική παράσταση του γινομένου και του άξονα του χρόνου). Το αποτέλεσμα είναι ίσο με την έξοδο του συστήματος $y(t)$ την αντίστοιχη χρονική στιγμή t.

5ο Βήμα: *Επανάληψη.* Τα βήματα αυτά επαναλαμβάνονται για τις διάφορες τιμές του χρόνου t.

Λύση Άσκησης 2

Για την λύση της άσκησης θα χρειαστούμε τις γραφικές παραστάσεις της επόμενης σελίδας.

Το ΓΧΑ σύστημα και η είσοδός του περιγράφονται στο Σχήμα α. Στο Σχήμα β δίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος. Στο Σχήμα γ δίνεται η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, $h(-\tau)$. Στο Σχήμα δ η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει μετατοπιστεί κατά $t < 0$, $h(t-\tau)$. Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $h(t-\tau)x(\tau)$ είναι ίσο με μηδέν για κάθε τιμή του χρόνου t μικρότερη του μηδενός. Έτσι η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = 0 \text{ για } t < 0$$

Στο Σχήμα ε η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει μετατοπιστεί κατά $0 < t < 1$. η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} h(t-\tau)d\tau = \int_0^t (1-t+\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t (1-t)d\tau + \int_0^t \tau \, d\tau = (1-t)\cdot[\tau]_0^t + [\frac{\tau^2}{2}]_0^t =$$

$$= t - \frac{t^2}{2}, \text{ για } 0 \le t \le 1$$

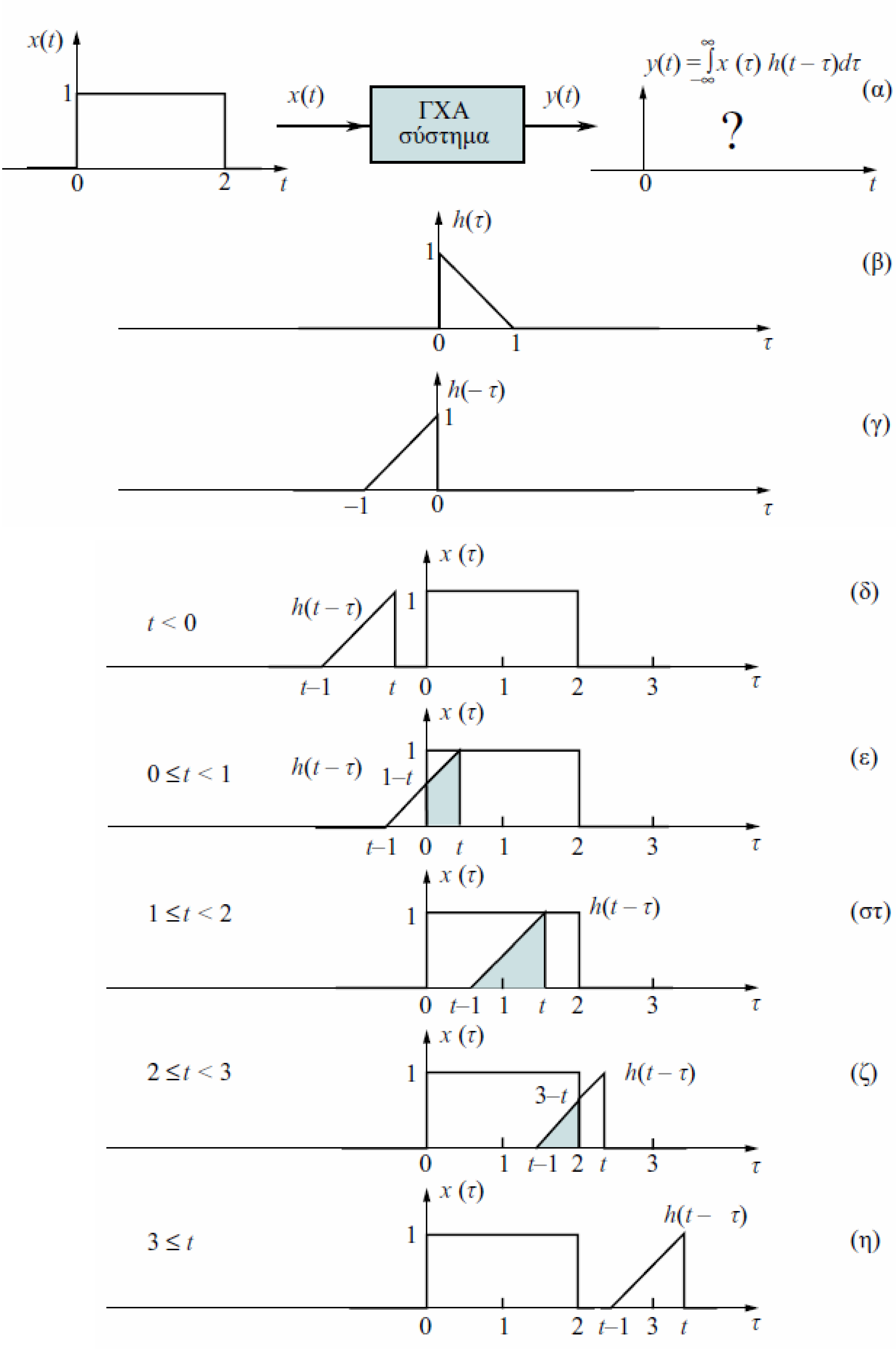
Στο Σχήμα στ η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει μετατοπιστεί κατά $1 \le t < 2$. η έξοδος του συστήματος δίνεται από

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} 1 \cdot h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}, \text{ για } 1 \le t < 2$$

Στο Σχήμα ζ η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει μετατοπιστεί κατά $2 \le t < 3$. Η έξοδος του συστήματος τώρα είναι ίση με

$$y(t) = \int_{t-1}^{2} 1 \cdot h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}(3-t)^2, \text{ για } 2 \le t < 3$$

Τέλος, όπως παρατηρούμε στο Σχήμα η, το γινόμενο $h(t-\tau)x(t)$ είναι ίσο με μηδέν για κάθε τιμή του χρόνου t μεγαλύτερη ή ίση από 3. Έτσι η έξοδος του συστήματος είναι $y(t) = 0$ όταν $3 \le t$.


x(t)
1
0
2
t
x(t)
ΓΧΑ
σύστημα
y(t)
y(t) = ∫ x(τ) h(t − τ)dτ
?
0
t
(α)
h(τ)
1
0
1
τ
(β)
h(− τ)
1
−1
0
τ
(γ)
t < 0
h(t − τ)
x (τ)
1
t−1
t
0
1
2
3
τ
(δ)
0 ≤ t < 1
h(t − τ)
1−t
x (τ)
1
t−1
0
t
1
2
3
τ
(ε)
1 ≤ t < 2
x (τ)
1
h(t − τ)
0
t−1
1
t
2
3
τ
(στ)
2 ≤ t < 3
x (τ)
1
3−t
h(t − τ)
0
1
t−1
2
t
3
τ
(ζ)
3 ≤ t
x (τ)
1
h(t − τ)
0
1
2
t−1
3
t
τ
(η)

Η έξοδος, λοιπόν, του συστήματος είναι

$$y(t)=\begin{cases} t-t^2/2, & 0\le t<1 \\ 1/2, & 1\le t<2 \\ (3-t)^2/2, & 2\le t<3 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Η αλγεβρική έκφραση της h(t-τ) που χρησιμοποιείται στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων είναι η

$$h(t-\tau)=\begin{cases} 1-t+\tau, & 0\le t-\tau\le 1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

(Επιβεβαιώστε πως τα αποτελέσματα των ολοκληρωμάτων είναι σωστά.)

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος μέσης τιμής

$$y(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau$$

Λύση άσκησης 3

Η κρουστική απόκριση του συστήματος μέσης τιμής, $h(t)$, είναι ίση με την έξοδο του συστήματος, αν αυτό διεγερθεί από τη συνάρτηση $\delta(t)$, δηλαδή

$$h(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \delta(\tau)d\tau=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} du(\tau)=\frac{1}{T}\left[u(t)-u(t-T)\right]$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $\delta(\tau)d\tau = du(\tau)$.

Άσκηση 4

Να εξετάστε αν τα παρακάτω συστήματα είναι:
(α) γραμμικά, (β) χρονικά αμετάβλητα, (γ) ευσταθή, (δ) αιτιατά.

(i)	$y(t) = x(\alpha t + \beta)$
(ii)	$y(t) = x(\alpha t) + \beta$
(iii)	$y(t) = x(\alpha t^2 + \beta)$
(iv)	$y(t) = x(\alpha t^2) + \beta$
(v)	$y(t) = x(t)\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$
(vi)	$y(t) = \int_{-\infty}^{t/2} x(3\tau)d\tau$
(vii)	$y(t) = x^2(t) + 2x(t+1)$

Λύση άσκησης 4

(i) $y(t) = x(at+\beta)$

- $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \Rightarrow y(t) = c_1 x_1(at+\beta) + c_2 x_2(at+\beta)$

  $= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \longrightarrow$ ΓΡΑΜΜΙΚΟ

- $y(t-t_0) = x(a(t-t_0)+\beta)$
- $F\{\underbrace{x(t-t_0)}_{\varphi(t)}\} = F\{\varphi(t)\} = \varphi(at+\beta) = x(at+\beta-t_0)$

  ΧΡ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ

Προσέξτε ότι για α=1 το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο (αυτό όμως δεν ισχύει για όλες τις τιμές του α)

- $|x(t)| < M < \infty \Leftrightarrow |x(at+\beta)| < M < \infty$

  $\Leftrightarrow |y(t)| < \infty \longrightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΦΕΦΕ

- Αν $a > 1$, $\beta > 0$, η έξοδος $y(t)$ την χρ. στιγμή t, εξαρτάται από την είσοδο $x(at+\beta)$ την στιγμή $t' = at+\beta > t \rightarrow$ ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

(ii) $y(t) = x(at)+\beta$

- $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \Rightarrow y(t) = c_1 x_1(at) + c_2 x_2(at) + \beta \neq y_1(t) + y_2(t)$ → ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ
- $y(t-t_0) = x(a(t-t_0)+b)$
- $F\{x(t-t_0)\} = F\{\varphi(t)\} = \varphi(at)+b =$
  $= x(at-t_0)+b$ ΧΡ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ
- $\left.\begin{array}{l}|x(t)|<\infty \\ |b|<\infty\end{array}\right\} \Rightarrow |y(t)| < |x(at)| + |\beta|$ → ΕΥΣΤΑΘΕΣ
- ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

(iii) $y(t) = x(at^2+\beta)$

- $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \rightarrow y(t) = c_1 x_1(at^2+\beta) + c_2 x_2(at^2+\beta) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$
  ↳ ΓΡΑΜΜΙΚΟ
- $y(t-t_0) = x(a(t-t_0)^2+b)$
- $F\{x(t-t_0)\} = F\{\varphi(t)\} =$ → ΧΡ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ
  $= \varphi(at^2+b) = x(at^2+b-t_0)$
- $|x(t)| < \infty \Rightarrow |y(t)| < \infty \Rightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ
- για $a>1$, $\beta>0$ εξαρτάται από $t'>t$ ⇒ ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

(iv) $y(t) = x(at^2)+\beta$

- $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \Rightarrow y(t) = c_1 x_1(at^2) + c_2 x_2(at^2) + \beta \neq c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow$ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ
- $y(t-t_0) = x(a(t-t_0)^2)+b$
- $F\{x(t-t_0)\} = F\{\varphi(t)\} = \varphi(at^2)+b =$ } ΧΡ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ
  $= x(at^2-t_0)+b$
- $\left.\begin{array}{l}|x(t)|<\infty \\ \beta<\infty\end{array}\right\} \Rightarrow |y(t)| < \infty \Rightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ
- Εξ/αι από $x(t')$, $t' = at^2 > t \Rightarrow$ ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

(v) $y(t) = x(t)\,\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}$

- $c_1x_1(t)+c_2x_2(t) \Rightarrow y(t) = c_1x_1(t)\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2} + c_2x_2(t)\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2} = c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$

  → ΓΡΑΜΜΙΚΟ

- $y(t-t_0) = x(t-t_0)\cdot\dfrac{e^{t-t_0}+e^{-(t-t_0)}}{2}$

- $F\{x(t-t_0)\} = F\{\varphi(t)\} =$

  $= \varphi(t)\cdot\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2} = x(t-t_0)\cdot\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}$ → ΧΡ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ

- $|x(t)|<\infty$ αλλά $\left\{\begin{array}{l} e^{t}\to+\infty \text{ για } t\to+\infty \\ e^{-t}\to+\infty \text{ '' } t\to-\infty \end{array}\right\}$ → ΟΧΙ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

- ΑΙΤΙΑΤΟ

(vi) $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t/2} x(3\tau)\,d\tau$

- $c_1x_1(t)+c_2x_2(t) \rightarrow y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t/2} c_1x_1(3\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{t/2} c_2x_2(3\tau)\,d\tau = c_1y_1+c_2y_2$

  → ΓΡΑΜΜΙΚΟ

- $y(t-t_0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{t-t_0}{2}} x(3\tau)\,d\tau$

- $F\{x(t-t_0)\} = F\{\varphi(t)\} = \displaystyle\int_{-\infty}^{t/2}\varphi(3\tau)\,d\tau =$

  $= \displaystyle\int_{-\infty}^{t/2} x(3\tau-t_0)\,d\tau =$

  $3\xi = 3\tau - t_0$

  $\xi = \tau - \dfrac{t_0}{3}$

  $\tau=-\infty \Rightarrow \xi=-\infty$

  $\tau=\dfrac{t}{2} \Rightarrow \xi=\dfrac{t}{2}-\dfrac{t_0}{3}$

  $= \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{t}{2}-\frac{t_0}{3}} x(3\xi)\,d\xi =$

  $= \displaystyle\int_{-\infty}^{t/2-\frac{t_0}{3}} x(3\tau)\,d\tau$ → ΧΡ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ

- $|x(t)|<\infty \Rightarrow y(t)$ μπορεί να πάει στο ∞

  γιατί έχουμε $\displaystyle\int_{-\infty}$ ⇒ πχ για $u(-t)$ θα έχει ∞ τιμές όσο $t\to-\infty$

  ⇒ ΑΣΤΑΘΕΣ

- $y(t)$ εξάρτ. από $x\left(\frac{3t}{2}\right)$ όταν $\tau\to t/2$, δηλ. $t'=\frac{3t}{2}>t$ ⇒ ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

(vii) $y(t) = x^2(t) + 2x(t+1)$

- Προφανώς είναι ΜΗ γραμμικό

- $y(t-t_0) = x^2(t-t_0) + 2x(t-t_0+1)$

- $F\{x(t-t_0)\} = F\{\varphi(t)\} =$

$= \varphi^2(t) + 2\varphi(t+1) =$

$= x^2(t-t_0) + 2x(t-t_0+1)$

ΧΡ. ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΟ

- $|x(t)| < M < \infty \Rightarrow |x^2(t)| < \infty$

$\Rightarrow |y(t)| < \infty$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

- $y(t)$ εξαρτάται από $x(t+1)$ $\Rightarrow$ ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

Άσκηση 5

Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα βρείτε αν είναι χωρίς μνήμη, αιτιατά και ευσταθή.

(α)	$y(t) = x(t-2) + x(2-t)$
(β)	$y(t) = \cos(3t)x(t)$

Λύση άσκησης 5

a) Το σύστημα ΔΕΝ είναι χωρίς μνήμη (memoryless) γιατί πχ για t=0 εξαρτάται από την τιμή της εισόδου σε t = -2 δηλαδή σε προηγούμενη χρονική στιγμή.

Το σύστημα ΔΕΝ είναι αιτιατό (causal) γιατί η τιμή του σε κάποια στιγμή t εξαρτάται από τιμές στο μέλλον. Πχ η τιμή της εξόδου y(0) = x(-2) + x(2) δηλαδή εξαρτάται από τιμή της εισόδου σε t=2.

Το σύστημα είναι ΦΕΦΕ (BIBO stable) γιατί φραγμένες είσοδοι θα δώσουν φραγμένη έξοδο αφού η έξοδος ισούται με το άθροισμα των εισόδων.

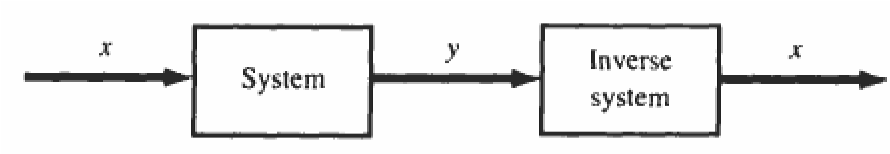
b) Το σύστημα είναι ΧΩΡΙΣ μνήμη (memoryless) αφού εξαρτάται από την είσοδο σε τωρινή χρονική στιγμή μόνο (x(t)).

Το σύστημα είναι αιτιατό (causal) γιατί η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

Το σύστημα είναι ΦΕΦΕ γιατί |cos(3t)| = 1 άρα |y(t)| = |x(t)| οπότε φραγμένη είσοδος θα δώσει φραγμένη έξοδο.

Άσκηση 6

Ένα σύστημα λέγεται αντιστρέψιμο αν μπορούμε να προσδιορίσουμε την είσοδό του x(t) παρατηρώντας την έξοδό του y(t) .



Βρείτε αν τα αντίστροφα συστήματα (αν υπάρχουν) για τα εξής συστήματα:

(a) $y(t) = 2x(t)$

(b) $y(t) = x^2(t)$

(c) $y[n] = nx[n]$

Λύση άσκησης 6

(a) Είναι αντιστρέψιμο, αφού

$$x(t) = \frac{1}{2}y(t)$$

(b) Δεν είναι αντιστρέψιμο, αφού διαφορετικές είσοδοι μπορούν να οδηγήσουν στην ίδια έξοδο.

Π.χ. για $x_1(t) = t, \quad x_2(t) = -t$ οι έξοδοι είναι $y_1(t) = y_2(t) = t^2$

(c) Δεν είναι αντιστρέψιμο, αφού διαφορετικές είσοδοι μπορούν να οδηγήσουν στην ίδια έξοδο (π.χ. για n = 0).