Λυμένες Ασκήσεις – Σετ 1ο

Άσκηση 1

Σχεδιάστε τις παρακάτω συναρτήσεις

$\alpha)\ e^{-2t}u(t-1)$

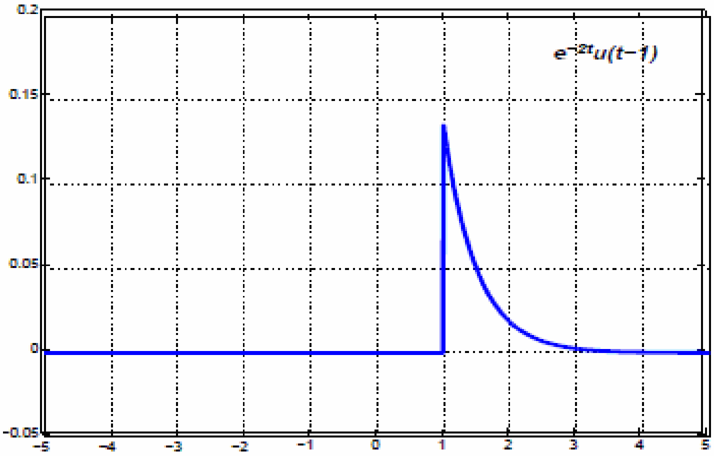
$\beta)\ u(t^2-9)$

$\gamma)\ \prod(\frac{t-2}{5})$, όπου $\prod(t) = \begin{cases} 1 & |\, t \,| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$ η συνάρτηση μοναδιαίου παλμού

Λύση Άσκησης 1

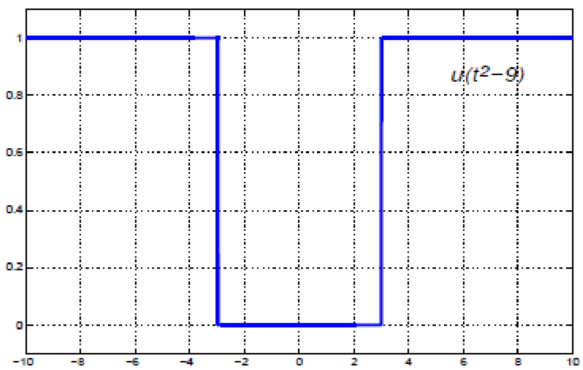
$\alpha)\ e^{-2t}u(t-1)$

Η συνάρτηση αυτή αποτελεί γινόμενο μια εκθετικής συνάρτησης και μιας μετατοπισμένης έκδοσης της βηματικής συνάρτησης. Προφανώς η τιμή της συνάρτηση θα είναι μηδεν για $t < 1$.



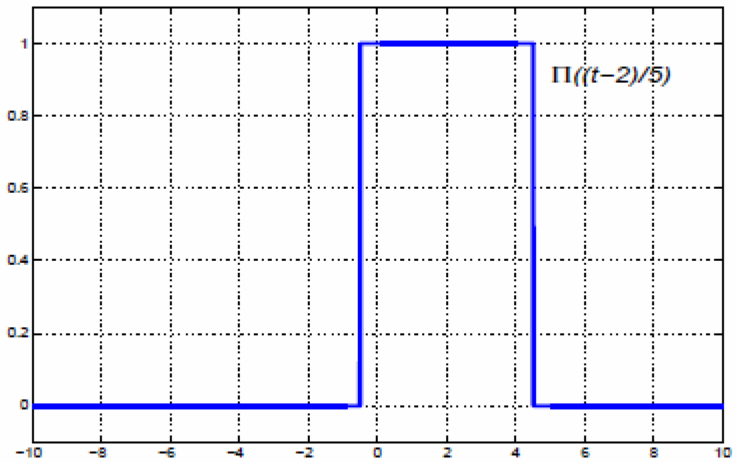
$\beta)\ u(t^2-9)$

Η συνάρτηση αυτή είναι ίση με 1 όταν $t^2 \geq 9$, δηλαδή όταν $|t| \geq 3$, ενώ στο διάστημα $(-3, 3)$ έχει μηδενική τιμή. Η γραφική της παράσταση δίνεται στο επόμενο σχήμα.



γ) $\prod(\frac{t-2}{5})$

Η ζητούμενη συνάρτηση είναι μια μετατόπιση μιας επέκτασης του μοναδιαίου παλμού. Συγκεκριμένα ο παλμός μετατοπίζεται κατά δύο μονάδες δεξιά και στη συνέχεια το εύρος του αυξάνεται από 1 σε 5 λόγω του παράγοντα 1/5. Συνεπώς όσο το t κινείται στο $[-0.5, 0.5]$ ο παράγοντας $\frac{t-2}{5}$ θα κινείται στο $[-0.5, 4.5]$. Η γραφική παράσταση της συνάρτηση δίνεται στο επόμενο σχήμα.



Άσκηση 2

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

a. $\int_{-2}^{1} \cos(\pi t) \cdot \delta(t-3)\, dt$

b. $\int_{1}^{7} \cos(\pi t) \cdot \delta(t-3)\, dt$

c. $\int_{-\infty}^{0} \cos(\pi\, t/2) \cdot \delta(t+13)\, dt$

Λύση Άσκησης 2

a. $\int_{-2}^{1} \cos(\pi t) \cdot \delta(t-3)\, dt = 0,$

γιατί το ολοκλήρωμα είναι από -2 εως 1, δηλ. δεν υπάρχει t=3 όπου το δ(t-3) θα έδινε μη μηδενικό αποτέλεσμα στο ολοκλήρωμα.

b. $\int_{1}^{7} \cos(\pi t) \cdot \delta(t-3)\, dt = \cos(3\pi) = -1,$

γιατί το ολοκλήρωμα είναι από 1 εως 7, δηλ. υπάρχει t=3

c. $\int_{-\infty}^{0} \cos(\pi\, t/2) \cdot \delta(t+13)\, dt = \cos\left(\frac{-13\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{2}\right),$

γιατί η cos είναι άρτια δηλ. $\cos(-x) = \cos(x)$ και συνιμήτονο περιττού πολλαπλάσιου της π/2 είναι 0. Τέλος ισχυει ότι και στο b.

Άσκηση 3

- Έστω δύο περιοδικά σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$, με βασικές περιόδους ίσες με T_1 και T_2 αντίστοιχα. Υπό ποιες συνθήκες είναι το άθροισμα $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ περιοδικό; Επίσης, εάν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό, ποια είναι η βασική του περίοδος;
- Επεκτείνετε τα συμπεράσματά σας και για το γινόμενο δύο περιοδικών σημάτων.
- Επεκτείνετε τα συμπεράσματά σας για την περίπτωση σημάτων διακριτού χρόνου.

Λύση Άσκησης 3

Εφόσον τα σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι περιοδικά, με βασικές περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$x_1(t) = x_1(t+T_1) = x_1(t+mT_1)$$

$$x_2(t) = x_2(t+T_2) = x_2(t+kT_2)$$

όπου m, k είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

Έτσι, $x(t) = x_1(t+mT_1) + x_2(t+kT_2)$

Για να είναι το σήμα $x(t)$ περιοδικό, με περίοδο T, θα πρέπει να ισχύει

$$x(t+T) = x_1(t+T) + x_2(t+T) = x_1(t+mT_1) + x_2(t+kT_2)$$

Έτσι, θα πρέπει να έχουμε

$$mT_1 = kT_2 = T \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{k}{m} = \text{ρητός αριθμός}$$

Με άλλα λόγια, το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων είναι περιοδικό σήμα μόνο εάν ο λόγος των αντίστοιχων περιόδων μπορεί να εκφραστεί σαν ρητός αριθμός. Σ' αυτήν την περίπτωση, η βασική περίοδος του σήματος $x(t)$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των T_1 και T_2.

Εάν ο λόγος $\frac{T_1}{T_2}$ είναι άρρητος αριθμός, τότε τα σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ δεν έχουν κοινή περίοδο και συνεπώς το άθροισμά τους $x(t)$ δεν είναι περιοδικό σήμα.

Η περίοδος T υπολογίζεται εύκολα ως $T = mT_1 = kT_2$, με την προϋπόθεση πως το κλάσμα $\frac{T1}{T2}$ είναι ανάγωγο (δεν διαιρείται άλλο).

β) Με ανάλογη διαδικασία καταλήγουμε πως τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν και για το γινόμενο δύο περιοδικών σημάτων.

γ) Στον διακριτό χρόνο παρατηρούμε πως οι περίοδοι N1 και N2 είναι πάντα ακέραιοι αριθμοί (εξ ορισμού), επομένως ο λόγος των περιόδων $\frac{N1}{N2}$ είναι πάντοτε ρητός αριθμός. Επομένως το άθροισμα *(και το γινόμενο)* δύο σημάτων διακριτού χρόνου είναι ΠΑΝΤΑ περιοδικό σήμα.

Άσκηση 4

Καθορίστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιοδικές και αν είναι, υπολογίστε την περίοδο τους

$\alpha)$ $e^{j\pi t-1}$

$\beta)$ $sin(t) + cos(\sqrt{2}t)$

$\gamma)$ $2cos(120\pi t + \pi/3) + 6cos(377t)$

Λύση Άσκησης 4

$\alpha)$ $e^{j\pi t-1}$

Για να δείξουμε ότι μία συνάρτηση $x(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T, αρκεί να δείξουμε ότι $x(t+T) = x(t)$. Στην συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $e^{2j\pi} = 1$ οπότε παρατηρούμε ότι

$$e^{j\pi t-1} = e^{2j\pi}e^{j\pi t-1} = e^{j\pi(t+2)-1}.$$

Επομένως η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $T = 2$.

$\beta)$ $sin(t) + cos(\sqrt{2}t)$

Οι επιμέρους συναρτήσεις $sin(t)$ και $cos(\sqrt{2}t)$ είναι περιοδικες με περίοδο 2π και $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ αντίστοιχα. Για να είναι όμως το αθροισμά τους περιοδική συνάρτηση, θα πρέπει ο λόγος των δύο περιόδων να είναι λόγος δύο ακεραίων, πράγμα αδύνατο αφού το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός. Άρα η συνάρτηση δεν είναι περιοδική.

$\gamma)$ $sin(120\pi t + \pi/3) + 6cos(377t)$

Εργαζόμαστε όπως και πριν και παρατηρούμε ότι ο λόγος T_{sin}/T_{cos} δεν μπορεί να γραφεί σαν λόγος ακεραίων αφού στο T_{cos} εμφανίζεται το π που είναι άρρητος αριθμός, ενώ στο T_{sin} όχι ($T_{sin} = 1/60$, $T_{cos} = 2\pi/377$).

Άσκηση 5

Καθορίστε ποια από τα παρακάτω σήματα είναι σήματα ενέργειας, ισχύος ή τίποτε από τα δύο.

(a) $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$

(b) $x(t) = tu(t)$

(c) $x[n] = (-0.5)^n u[n]$

(d) $x[n] = u[n]$

(e) $x[n] = 2e^{j3n}$

Υπενθύμιση βασικών τύπων

	Σήμα ενέργειας	**Σήμα ισχύος**
Συνεχής χρόνος	$E = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t) \rvert^2 dt < \infty$	$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [x(t)]^2 \, dt < \infty$
Διακριτός χρόνος	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n] \rvert^2 < \infty$	$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \lvert x[n] \rvert^2 < \infty$

Σε κάθε περίπτωση πρέπει επίσης να ισχύει $E > 0, \quad P > 0$

Λύση Άσκησης 5

$$(a) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} \, dt = \frac{1}{2a} < \infty$$

Επομένως είναι σήμα ενέργειας.

$$(b) \quad E = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^{T/2} t^2 \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty$$

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} t^2 \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty$$

Επομένως δεν είναι ούτε σήμα ενέργειας ούτε σήμα ισχύος

$$(c) \quad E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n = \frac{1}{1 - 0.25} = \frac{4}{3} < \infty$$

Επομένως είναι σήμα ενέργειας.

$$(d) \quad P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} (N+1) = \frac{1}{2} < \infty$$

Επομένως είναι σήμα ισχύος.

$(e)\quad |x[n]| = |2e^{j3n}| = 2|e^{j3n}| = 2,$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 2^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} 4(2N+1) = 4 < \infty$$

Επομένως είναι σήμα ισχύος.

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι το παρακάτω σήμα είναι περιοδικό μόνο όταν $\Omega_0/2\pi$ είναι ρητός αριθμός.

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

Λύση Άσκησης 6

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} e^{j\Omega_0 N} = e^{j\Omega_0 n}$$

άρα $e^{j\Omega_0 N} = 1$

$$\Omega_0 N = m2\pi$$

$m =$ θετικός ακέραιος

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad \text{είναι ρητός}$$

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι το μιγαδικό εκθετικό σήμα είναι περιοδικό με βασική περίοδο $T = 2\pi / \omega_0$

Λύση Άσκησης 7

Είναι $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

Για να είναι περιοδικό πρέπει να ισχύει

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

$$e^{j\omega_0 T} = 1$$

Άρα $\omega_0 T = m2\pi$ ή $T = m\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ όπου m θετικός ακέραιος

Επομένως η βασική περίοδος T_0

είναι η μικρότερη δυνατή τιμή του Τ, δηλαδή για m = 1

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$