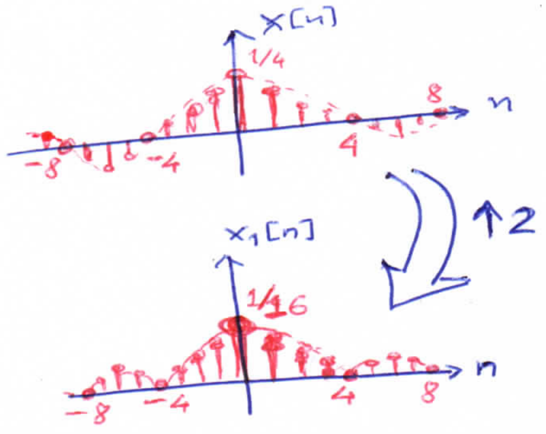
ΛΥΣΕΙΣ 2ου ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2.1. $x[n] = \left[\dfrac{\sin(\frac{\pi n}{4})}{\pi n}\right]^2$



A ΣΧΕΔΙΟ

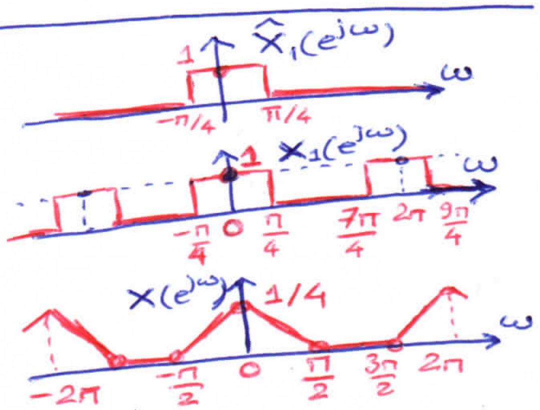
- Έστω $x_1[n] = \dfrac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$, τότε: $x[n] = x_1^2[n]$.
- Παρατηρούμε: $x_1[n] = 0$ στα $\frac{\pi n}{4} = k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\dots)$

  δηλαδή για $n = 4k$, $k = \pm1, \pm2, \pm3, \dots$
- Ομοίως και το $x[n]$
- Για $n=0$, από κανόνα de l'Hospital:

$$x_1[0] = \lim_{x\to 0} \frac{[\sin(\pi x/4)]'}{[\pi x]'} = \left(\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi x}{4}\right)/\pi \Big|_{x=0} = \frac{1}{4}$$

άρα $x[0] = (1/4)^2 = 1/16$

B $X(e^{j\omega}) = ?$



- Από ιδιότητα γινομένου στο χρόνο:

$$x[n] = x_1[n] \cdot x_1[n] \Longrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\left(X_1(e^{j\omega}) \circledast X_1(e^{j\omega})\right) =$$

↑ περιοδική συνέλιξη

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\hat{X}_1(e^{j\omega}) * X_1(e^{j\omega})\right) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{|\omega|}{2\pi}, & |\omega| \le \pi/2 \\ 0, & \frac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

(επαναλαμβάνεται με περίοδο 2π)

ΜΙΑ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΜΟΝΟ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

C $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^\lambda = ?$ $(\lambda = 1, 2)$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = 1/4$$

- Επειδή το $x[n]$ είναι πραγματικό, θετικό για κάθε n:
- Από Θ. Parseval:

$$\sum |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \overset{\text{λόγω συμμετρίας}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{4} - \frac{\omega}{2\pi}\right)^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{16} - \frac{\omega}{4\pi} + \frac{\omega^2}{4\pi^2}\right) d\omega = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\omega}{16}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\omega^2}{8\pi}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\omega^3}{12\pi^2}\Big|_0^{\pi/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{32}} - \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{32}} + \frac{\cancel{\pi}}{8 \cdot 12}\right) = \frac{1}{96} \simeq 0.0104$$

2.2.A. $\boxed{X(e^{j\omega}) = \ln\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \Rightarrow x[n]=?}$

- Απο ιδιότητα παραγώγισης στη συχνότητα, αν $x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$,

$$n\,x[n] \xleftrightarrow{DTFT} j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = j\cdot\frac{j\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = -\frac{1}{2}e^{-j\omega}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (1)$$

- Επίσης, από το τυπολόγιο:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \xRightarrow{\text{ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΜΕΤΑΘΕΣΗΣ}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$\xRightarrow{\text{ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ}} -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] \xleftrightarrow{DTFT} -\frac{1}{2}e^{-j\omega}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (2)$$

- Άρα, από (1) & (2):

$$n\,x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] \Longleftrightarrow \boxed{x[n] = -\frac{1}{n2^n}u[n-1]}$$

2.2.B. $\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{4}{16-4\sqrt{2}e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}} \Rightarrow x[n]=?}$

- Το πολυώνυμο του παρανομαστή (ως προς $e^{-j\omega}$) έχει ρίζες: $\frac{4\sqrt{2}\pm\sqrt{32-64}}{2} = 2\sqrt{2}(1\pm j)$

- Άρα: $X(e^{j\omega}) = \frac{4}{[e^{-j\omega}-2\sqrt{2}(1+j)][e^{-j\omega}-2\sqrt{2}(1-j)]} =$

$$= \frac{4\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}(1+j)}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}(1-j)}\right)}{\left[1-\frac{1}{2\sqrt{2}(1+j)}e^{-j\omega}\right]\left[1-\frac{1}{2\sqrt{2}(1-j)}e^{-j\omega}\right]} = \frac{1/4}{\left[1-e^{-j\omega}\frac{\sqrt{2}(1-j)}{8}\right]\left[1-e^{-j\omega}\frac{\sqrt{2}(1+j)}{8}\right]}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left[\frac{1+j}{2}\right]}{1-e^{-j\omega}\frac{\sqrt{2}(1-j)}{8}} + \frac{\frac{1}{4}\left[\frac{1-j}{2}\right]}{1-e^{-j\omega}\frac{\sqrt{2}(1+j)}{8}} \quad \left|\frac{\sqrt{2}(1\pm j)}{8}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

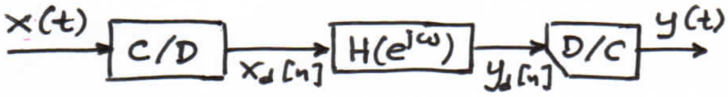
$$\Rightarrow x[n] = \left[\frac{1}{4}\frac{1+j}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(1-j)}{4}\right]^n + \frac{1}{4}\frac{1-j}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(1+j)}{4}\right]^n\right]u[n]$$

$e^{-j\frac{\pi}{4}}$ $\quad e^{j\frac{\pi}{4}}$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\left[\frac{1+j}{2}e^{-j\frac{\pi n}{4}} + \frac{1-j}{2}e^{j\frac{\pi n}{4}}\right]u[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\left[\frac{e^{j\frac{\pi n}{4}}+e^{-j\frac{\pi n}{4}}}{2} - \frac{j}{2}\left(e^{j\frac{\pi n}{4}} - e^{-j\frac{\pi n}{4}}\right)\right]u[n]$$

$$\Rightarrow \boxed{x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\left(\cos\frac{\pi n}{4} + \sin\frac{\pi n}{4}\right)u[n]}$$

2.3



$$x(t)=\left[\frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t}\right]^2 \qquad \Omega_s=\pi \qquad y_d[n]=\frac{x_d[n-1]+x_d[n+1]}{2}$$

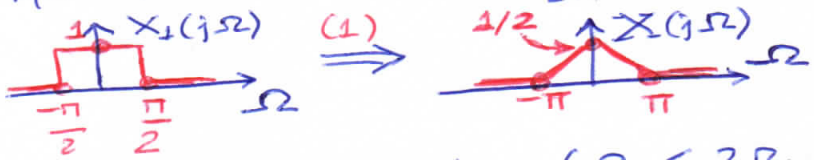
A ΣΧΕΔΙΟ $x(t)$

- Έστω $x_1(t)=\frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t}$, τότε $x(t)=x_1^2(t)$
- Παρατηρούμε πως $x_1(t)=x(t)=0$ για $\pi t/2=k\pi \Leftrightarrow t=2k$, $k=\pm1,\pm2,\dots$
- Για $t=0$: $x_1(0)=\lim_{t\to0}\frac{[\sin(\pi t/2)]'}{[\pi t]'}=\frac{1}{2} \Rightarrow x(0)=1/4$

B $y(t)=?$

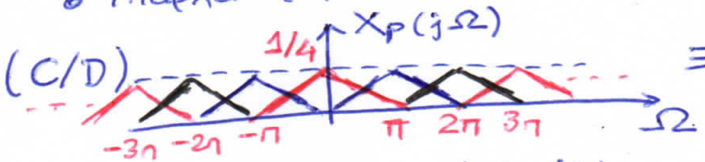
Δουλεύουμε στο πεδίο της συχνότητας.

- Βρίσκουμε πρώτα το $X(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}X_1(j\Omega)*X_1(j\Omega)$ (1)

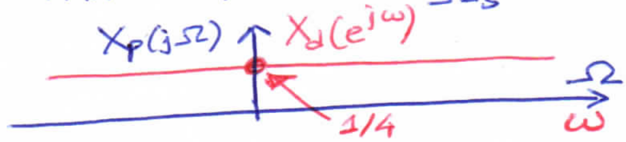


- Υπάρχει προφανώς αναδίπλωση ($\Omega_s<2\Omega_{MAX}=2\pi$): $\left(T=\frac{2\pi}{\Omega_s}=2\right)$

(C/D)

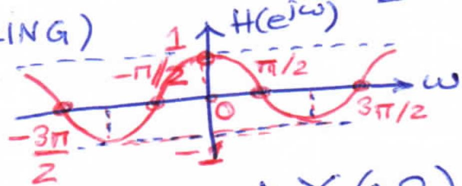


$\equiv$

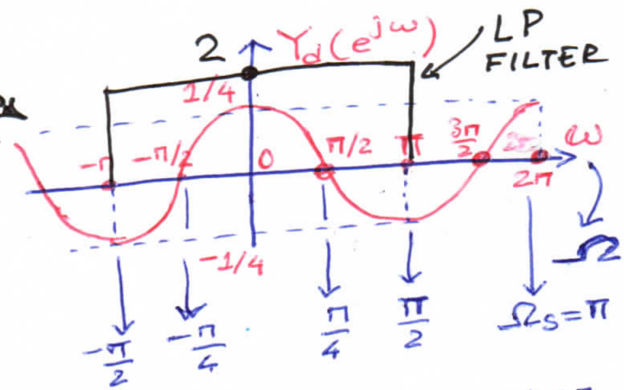


- $H(e^{j\omega})=\frac{e^{-j\omega}+e^{j\omega}}{2}=\cos\omega$

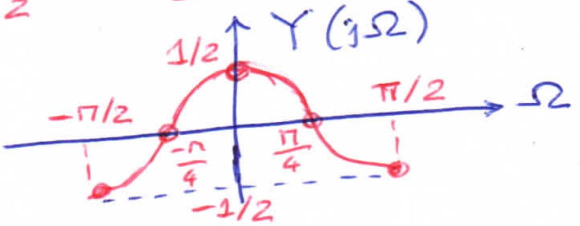
(FILTERING)



ΓΙΝΟΜΕΝΟ



(D/C)



Άρα $Y(j\Omega)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos(2\Omega); & |\Omega|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & ;\ \text{αλλού}\end{cases}$

- Συνεπώς: $y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(2\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega=$

$$=\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(e^{2j\Omega}+e^{-2j\Omega})e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{j\Omega(t+2)}d\Omega+\frac{1}{8\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{j\Omega(t-2)}d\Omega=$$

$$=\frac{1}{8\pi}\frac{1}{j(t+2)}\left[e^{j\frac{\pi}{2}(t+2)}-e^{-j\frac{\pi}{2}(t+2)}\right]+\frac{1}{8\pi}\cdot\frac{1}{j(t-2)}\left[e^{j\frac{\pi}{2}(t-2)}-e^{-j\frac{\pi}{2}(t-2)}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t)=\frac{1}{4}\left[\frac{\sin[\pi/2\cdot(t+2)]}{\pi(t+2)}+\frac{\sin[\pi/2\cdot(t-2)]}{\pi(t-2)}\right]}$$

$\boxed{C}$ $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} y^{\lambda}(t)dt \ , \ \lambda=1,2}$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt = Y(j\Omega)\Big|_{\Omega=0} = \frac{1}{2}$

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)dt \underset{\underset{y(t)\in\mathbb{R}}{\uparrow}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt \underset{\underset{\text{PARSEVAL}}{\uparrow}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(j\Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(2\Omega)\, d\Omega$$

$$= \frac{1}{16\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[1+\cos(4\Omega)]\,d\Omega = \frac{1}{16\pi}\left[\Omega\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{\sin(4\Omega)}{4}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{16\pi}\left[\pi + \frac{\overset{\to 0}{\cancel{\sin(2\pi)}} - \overset{\to 0}{\cancel{\sin(-2\pi)}}}{4}\right] = \frac{1}{16}$$

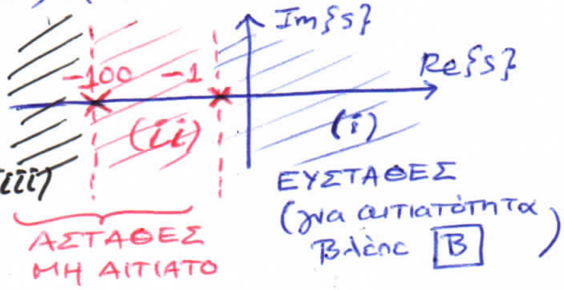
$\boxed{2.4}$ $\boxed{H(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2+101s+100}}$

$\boxed{A}$ $\boxed{\text{ROCs?}}$ Ο παρονομαστής έχει ρίζες -100 & -1, άρα οι πιθανές Π.Σ. είναι:

(i) $Re\{s\} > -1$

(ii) $-100 < Re\{s\} < -1$

(iii) $Re\{s\} < -100$



$\boxed{B}$ $\boxed{\text{ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ?}}$

- Η μόνη περίπτωση για αιτιατότητα αποτελεί η Π.Σ. (i). Ωστόσο, επειδή η $H(s)$ δεν είναι ρητή συνάρτηση, πρέπει να το διαπιστώσουμε από την $h(t)$.
- $H(s) = \dfrac{e^{-2s}}{(s+100)(s+1)} = e^{-2s}\cdot\left[\dfrac{1/99}{s+1} - \dfrac{1/99}{s+100}\right] \Longrightarrow h(t) = \dfrac{1}{99}\left(e^{-(t-2)} - e^{-(100t-200)}\right)u(t)$

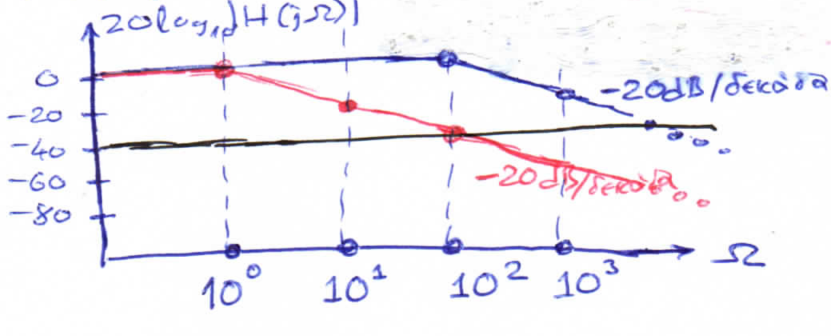
καθώς η $h(t)$ είναι μηδέν για $t<2$, το σύστημα μπορεί να είναι ΑΙΤΙΑΤΟ (για Π.Σ.(i))

$\boxed{C}$ $\boxed{\text{BODE PLOT}}$

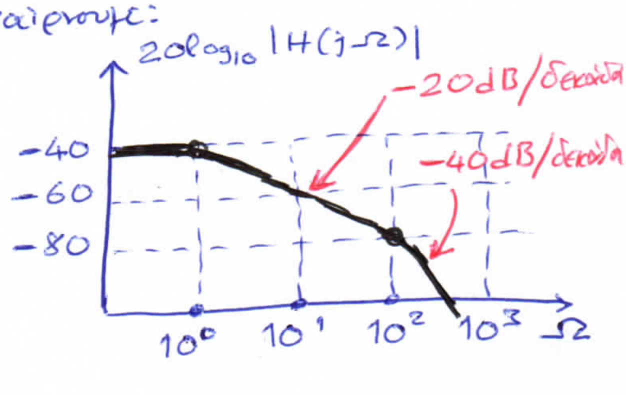
- Για Π.Σ (i), $|H(j\Omega)| = \dfrac{\overset{\to 1}{\cancel{|e^{-2j\Omega}|}}}{|(j\Omega+1)(\frac{j\Omega}{100}+1)100|} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow 20\log_{10}|H(j\Omega)| = \underset{\underset{-20\log_{10}100}{\equiv}}{-40} - 20\log_{10}|j\Omega+1| - 20\log_{10}\left|\frac{j\Omega}{100}+1\right|$$

- Αθροίζοντας τις:



..., παίρνουμε:



$$\boxed{\begin{array}{l} \boxed{D} \quad x_1(t) = e^{t} \Rightarrow y_1(t) = ? \\ x_2(t) = e^{-t}u(t) \Rightarrow y_2(t) = ? \\ \text{(SYSTEM STABLE)} \end{array}}$$

- Το $x_1(t)$ είναι της μορφής $x_1(t) = e^{s_o t}$ με $s_o = 1$.

Για ευσταθές σύστημα, $s_o \in ROC$, συνεπώς

$$y_1(t) = H(s_o)\, e^{s_o t}\Big|_{s_o=1} = \frac{e^{-2}}{202}\, e^{+t} = \boxed{\frac{e^{t-2}}{202}}$$

- $x_2(t) = e^{-t}u(t) \Longrightarrow X_2(s) = \dfrac{1}{s+1}$; ROC: $Re\{s\} > -1$

Άρα $Y_2(s) = X_2(s)H(s) = \dfrac{e^{-2s}}{(s+1)^2(s+100)}$ με Π.Σ: $Re\{s\} > -1$

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα:

$$Y_2(s) = e^{-2s} \cdot \left[\frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+100}\right]$$

όπου:

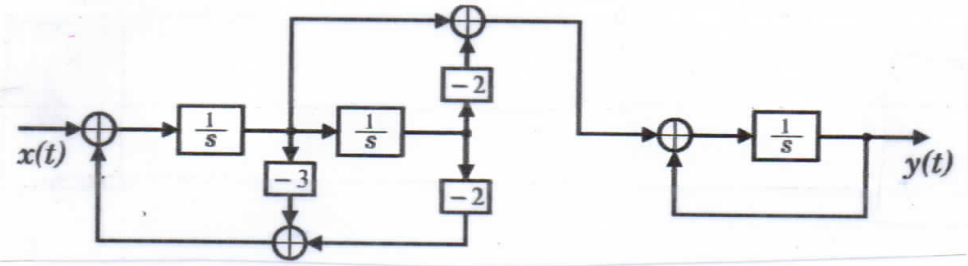
$$C = \frac{1}{(s+1)^2}\Big|_{s=-100} = \frac{1}{99^2}$$

$$B = \frac{1}{s+100}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{99}$$

$$A = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+100}\right)\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{(s+100)^2}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{99^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y_2(t) = \frac{1}{99}\left[(t-2)e^{-(t-2)} + \frac{1}{99}e^{-(100t-200)} - \frac{1}{99}e^{-(t-2)}\right]u(t)}$$

2.5.



A $H(s)=?$ differential eqn?

• Το δοθέν διάγραμμα υλοποίησης αποτελεί εν-σειρά συνδεσμολογία δύο υποσυστημάτων, άρα:

$$H(s)=\frac{s-2}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s-1}=\frac{s-2}{s^3+2s^2-s-2} \quad (1)$$

• Η διαφορική εξίσωση εισόδου-εξόδου θα είναι η:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3}+2\frac{d^2y(t)}{dt^2}-\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}-2x(t)$$

B ROCs?

Παραγοντοποιώντας τον παρανομαστή της $H(s)$, έχουμε:

$$H(s)=\frac{s-2}{(s+2)(s+1)(s-1)}$$, άρα ΠΟΛΟΙ $=\{-2,-1,1\}$, ΜΗΔΕΝΙΚΑ $=\{2,\infty,\infty\}$

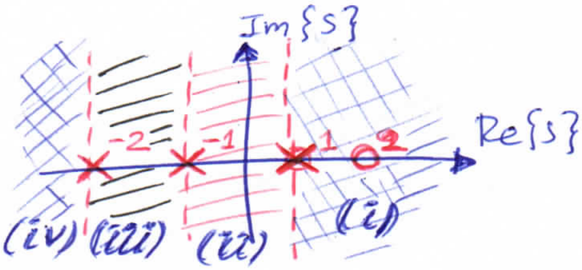
Άρα έχουμε τέσσερεις πιθανές Π.Σ.:

(i) $Re\{s\}>1$ (ασταθές, αιτιατό)

(ii) $-1<Re\{s\}<1$ (ευσταθές, μη αιτιατό)

(iii) $-2<Re\{s\}<-1$ (ασταθές, μη αιτιατό)

(iv) $Re\{s\}<-2$ (» , »)



C ΓΙΑ ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ, $s(t)=?$

• Λόγω ευστάθειας, η Π.Σ της $H(s)$ είναι η (ii): $-1<Re\{s\}<1$ $\Longrightarrow$

Έχουμε $x(t)=u(t) \Longrightarrow X(s)=\frac{1}{s}$, Π.Σ: $Re\{s\}>0$

$$\Longrightarrow Y(s)=\frac{s-2}{s(s-1)(s+1)(s+2)}=\underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{Right}}-\underbrace{\frac{1/6}{s-1}}_{\text{Left}}-\underbrace{\frac{3/2}{s+1}}_{\text{Right}}+\underbrace{\frac{2/3}{s+2}}_{\text{Right}} \quad (0<Re\{s\}<1)$$

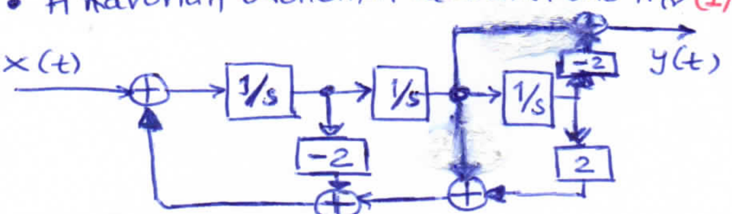
$$\Longrightarrow \boxed{y(t)\equiv s(t)=\left(1-\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{-2t}\right)u(t)+\frac{1}{6}e^{t}u(-t)}$$

D DIRECT & PARALLEL IMPLEMENTATIONS

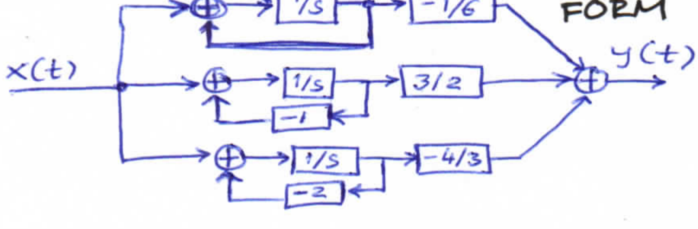
• Η παράλληλη, από ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα:

$$H(s)=-\frac{1}{6}\frac{1}{s-1}+\frac{3}{2}\frac{1}{s+1}-\frac{4}{3}\frac{1}{s+2}$$, οπότε:

• Η κανονική υλοποίηση προκύπτει από την (1):

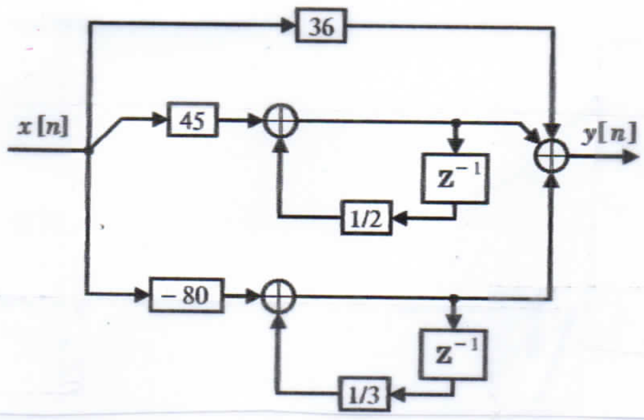


DIRECT FORM



PARALLEL FORM

2.6.



A $H(z)=?$ difference eqn.?

Πρόκειται για διάγραμμα υλοποίησης εν παραλλήλω, οπότε: $H(z)=36+\frac{45}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{80}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$ (3) $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boxed{H(z)=\frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}} \ (1) \ =\frac{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} \ (2)$$

Η εξίσωση διαφορών εισόδου/εξόδου προκύπτει από την (1) ως:

$$\frac{1}{6}y[n-2]-\frac{5}{6}y[n-1]+y[n]=$$
$$=6x[n-2]-5x[n-1]+x[n]$$

Από την (2) έχουμε: ΠΟΛΟΙ = $\{1/2,\ 1/3\}$
ΜΗΔΕΝΙΚΑ = $\{2,\ 3\}$

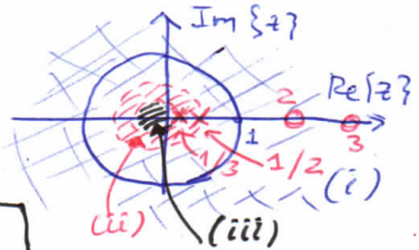
B ROCs?

Άρα έχουμε 3 πιθανές Π.Σ:

(i) $|z|>1/2$ $\Longrightarrow$ ΑΙΤΙΑΤΟ & ΕΥΣΤΑΘΕΣ

(ii) $1/3<|z|<1/2$ ⎫

(iii) $|z|<1/3$ ⎭ → ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ & ΑΣΤΑΘΕΣ



C $h[n]=?$ για ευσταθές σύστημα

• Η κρουστική απόκριση προκύπτει από την (3), μαζί με την πληροφορία για ευστάθεια (δηλ. Π.Σ: $Re\{z\}>1/2$).

• Άρα, $\boxed{h[n]=36\delta[n]-80\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]+45\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$

D $|H(e^{j\omega})|=?$ για ευσταθές σύστημα

Από την (2), $|H(e^{j\omega})|=\frac{|1-2e^{-j\omega}|}{|1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}|}\cdot\frac{|1-3e^{-j\omega}|}{|1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}|}$

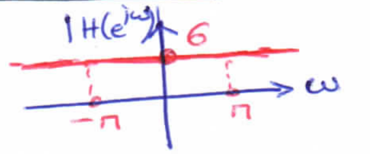
Παρατηρούμε πως: $\left|\frac{1-2e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right|=|-2e^{-j\omega}|\cdot\frac{|\cancel{1-1/2\,e^{+j\omega}}|}{|\cancel{1-1/2\,e^{-j\omega}}|}=2$

2

συζυγείς, άρα ίδιο μέτρο

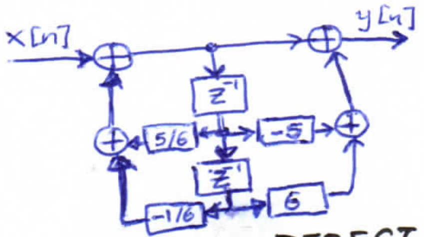
Παρόμοια, $\frac{|1-3e^{-j\omega}|}{|1-1/3\,e^{-j\omega}|}=3$,

άρα $\boxed{|H(e^{j\omega})|=6}$



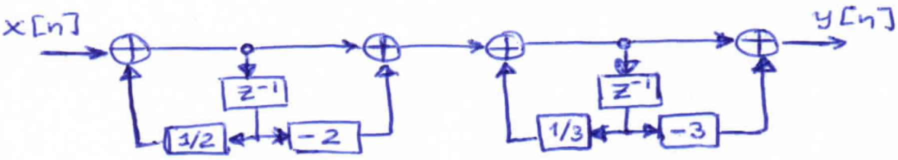
E DIRECT & CASCADE IMPLEMENTATIONS

• Η κανονική υλοποίηση προκύπτει από την (1):



DIRECT FORM

• Η εν σειρά υλοποίηση προκύπτει από την (2):



CASCADE FORM