Π. Θ.
ΤΗΜΜΥ

ΗΥ 241: ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

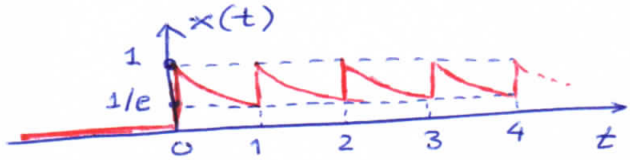
ΛΥΣΕΙΣ 1ου ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΕΞ. 2017-18
ΕΑΡΙΝΟ

1.1.A

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{k-t}\left(u(t-k) - u(t-k-1)\right)$$

- $x(t) = e^{-t}(u(t)-u(t-1)) + e^{-(t-1)}(u(t-1)-u(t-2)) + e^{-(t-2)}(u(t-2)-u(t-3)) + \ldots$
- ΣΧΕΔΙΟ:



- Αναμένουμε να είναι σήμα ισχύος, λόγω της επανάληψης των φθινόντων εκθετικών.
- Θεωρώντας ακέραια T: $P_{2T} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2 dt = \frac{T}{2T}\int_0^1 e^{-2t}dt = \frac{1-e^{-2}}{4} = 0.216$

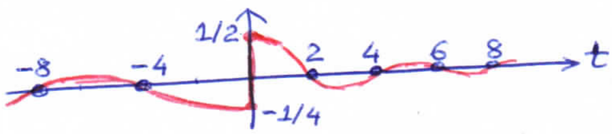
(για μη ακέραια, η υπόλοιπη συνεισφορά τείνει στο 0, όταν $T\to\infty$)

Άρα $\boxed{P_\infty = 0.216}$

1.1.B

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t}u(t) - \frac{\sin(\pi t/4)}{\pi t}\cdot u(-t)$$

- ΣΧΕΔΙΟ



- Αναμένουμε να είναι σήμα ενέργειας.
- Έστω $x_1(t) = \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t}$, $x_2(t) = \frac{\sin(\pi t/4)}{\pi t}$, δηλ: $x(t) = x_1(t)u(t) - x_2(t)u(-t)$
- Τότε $E_\infty = \int_{-\infty}^{0}|x_2(t)u(-t)|^2 dt + \int_0^{\infty}|x_1(t)u(t)|^2 dt =$ ← ΛΟΓΩ ΑΡΤΙΟΤΗΤΑΣ (even) των $x_{1,2}(t)$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_2(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1(t)|^2 dt =$$ ← ΑΠΟ PARSEVAL

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X_2(j\Omega)|^2 d\Omega + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X_1(j\Omega)|^2 d\Omega =$$

← $X_1(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

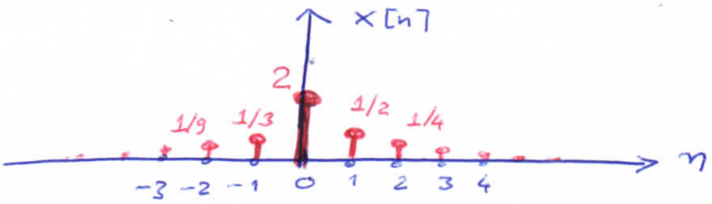
← $X_2(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$= \frac{1}{4\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{2} + \frac{1}{4\cancel{\pi}}\cancel{\pi} = \frac{3}{8}$$

Άρα $\boxed{E_\infty = \frac{3}{8} = 0.375}$

1.1.c $x[n] = 3^{n}u[-n] + 2^{-n}u[n]$

• Σχέδιο:



• Αναφέρουμε σήμα ενέργειας:

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n} + 4 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{0} 3^{2n}\right) - 1 + 4 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2n}\right) - 1$$

$$\underset{n'=-n}{=} 2 + \sum_{n'=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n'} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} = 2 + \frac{1}{1-\frac{1}{9}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}} =$$

$$= 2 + \frac{9}{8} + \frac{4}{3} = 4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = 4 + \frac{11}{24} = 4.458$$

Άρα $\boxed{E_\infty = 4.458}$

1.2.A $x[n] = \cos\frac{\pi n}{6} + j\sin\frac{\pi n}{15} \Rightarrow N_0 = ?$

• Το $\boxed{\cos\frac{\pi n}{6}}$ είναι περιοδικό με $N_1 = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$

• Το $\boxed{j\sin\frac{\pi n}{15}}$ είναι περιοδικό με $N_2 = \frac{2\pi}{\pi/15} = 30$

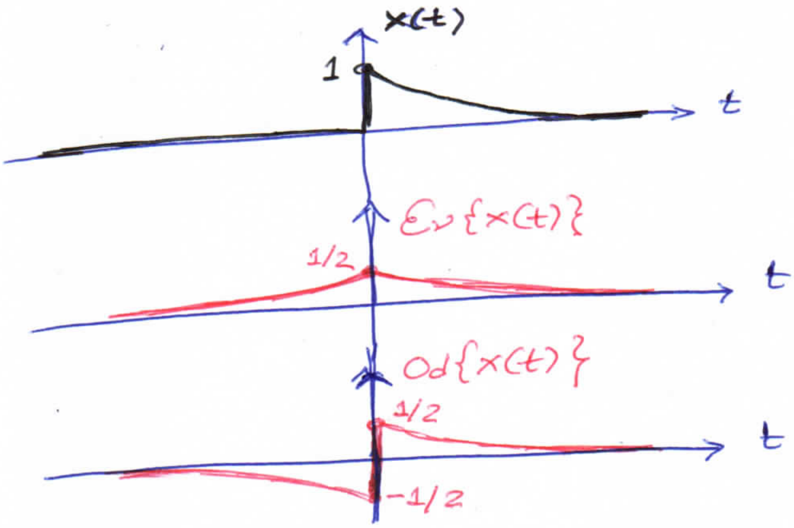
$\Rightarrow$ το άθροισμα είναι περιοδικό με $N_0 = \text{ΕΚΠ}\{12, 30\} = 60$

• Άρα το $x[n]$ είναι περιοδικό με $\boxed{N_0 = 60}$

1.2.B $x(t) = e^{-t}u(t) \Rightarrow Ev\{x(t)\}, Od\{x(t)\} = ?$

$$Ev\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2} = \frac{e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)}{2}$$

$$Od\{x(t)\} = \frac{x(t)-x(-t)}{2} = \frac{e^{-t}u(t) - e^{t}u(-t)}{2}$$



1.3.A. $y[n] = \frac{1}{5}\left(x[n-2] + x[n-1] + x[n] + x[n+1] + x[n+2]\right) \Rightarrow$ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ?

- **ΓΡΑΜΜΙΚΟ?** Ναι, γιατί: $x_1[n] \to y_1[n] = \frac{1}{5}\left(x_1[n-2] + x_1[n-1] + x_1[n] + x_1[n+1] + x_1[n+2]\right)$

$x_2[n] \to y_2[n] = \frac{1}{5}\left(x_2[n-2] + x_2[n-1] + x_2[n] + x_2[n+1] + x_2[n+2]\right)$

$$x[n] = a x_1[n] + b x_2[n] \longrightarrow y[n] = \frac{1}{5}\Big(a x_1[n-2] + b x_2[n-2] + a x_1[n-1] + b x_2[n-1] +$$
$$+ a x_1[n] + b x_2[n] + a x_1[n+1] + b x_2[n+1] +$$
$$+ a x_1[n+2] + b x_2[n+2] \Big) =$$
$$= a \frac{1}{5}\left(x_1[n-2] + x_1[n-1] + x_1[n] + x_1[n+1] + x_1[n+2]\right) +$$
$$+ b \frac{1}{5}\left(x_2[n-2] + x_2[n-2] + x_2[n] + x_2[n+1] + x_2[n+2]\right) =$$
$$= a y_1[n] + b y_2[n]$$

- **ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ?** Ναι, γιατί $x[n-k] \longrightarrow \frac{1}{5}\left(x[n-k-2] + x[n-k-1] + x[n-k] + x[n-k+1] + x[n-k+2]\right) = y[n-k]$

- **ΑΙΤΙΑΤΟ?** ΟΧΙ, γιατί η έξοδος τη χρονική στιγμή n εξαρτάται από είσοδο σε μελλοντικές χρονικές στιγμές ($n+1$, $n+2$).

- **ΕΥΣΤΑΘΕΣ?** Ναι, γιατί $|x[n]| < B_x \;\; \forall n \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow |y[n]| = \frac{1}{5}\left|x[n-2] + x[n-1] + x[n] + x[n+1] + x[n+2]\right| \le$$
$$\le \frac{1}{5}\left(|x[n-2]| + |x[n-1]| + |x[n]| + |x[n+1]| + |x[n+2]|\right) \overset{(1)}{<}$$
$$< \frac{1}{5}\left(B_x + B_x + B_x + B_x + B_x\right) = B_x \equiv B_y, \; \forall n$$

- **ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟ?** ΟΧΙ, γιατί δύο διαφορετικά σήματα εισόδου:

$x_1[n] = 1, \; \forall n$

$x_2[n] = \begin{cases} 5, & n = 5k \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

δίνουν την ίδια έξοδο $y_1[n] = y_2[n] = 1, \; \forall n$

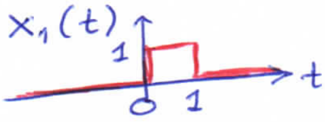
1.3.B $y(t)=t^2x(t) \Rightarrow$ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ?

• **ΓΡΑΜΜΙΚΟ?** Ναι, γιατί:

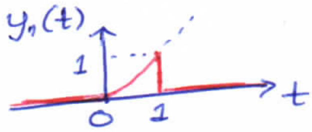
$$\left.\begin{array}{l} x_1(t)\to y_1(t)=t^2x_1(t) \\ x_2(t)\to y_2(t)=t^2x_2(t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=ax_1(t)+bx_2(t) \longrightarrow y(t)=t^2(ax_1(t)+bx_2(t)) =$$
$$= at^2x_1(t)+bt^2x_2(t) =$$
$$= ay_1(t)+by_2(t)$$

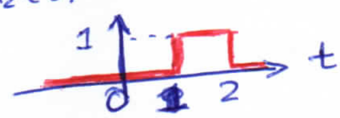
• **ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ?** ΟΧΙ, γιατί:



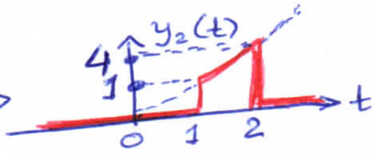
$\Rightarrow$



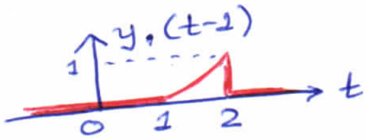
$x_2(t)=x_1(t-1)$



$\Longrightarrow$



$\neq$



• **ΑΙΤΙΑΤΟ?** Ναι, γιατί η έξοδος στο t εξαρτάται μόνο από την είσοδο την ίδια χρονική στιγμή (άρα είναι και σύστημα χωρίς μνήμη).

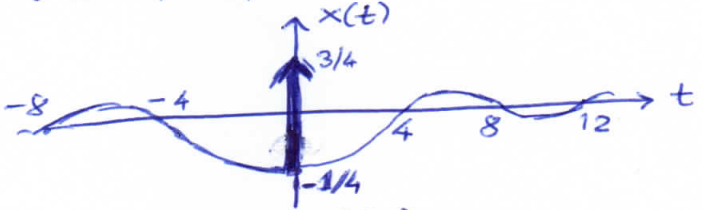
• **ΕΥΣΤΑΘΕΣ?** ΟΧΙ, γιατί το φραγμένο σήμα εισόδου $\boxed{x(t)=1,\ \forall t}$ δίνει έξοδο $\boxed{y(t)=t^2}$, που δεν είναι φραγμένο ($\lim_{t\to\infty} t^2=\infty$).

• **ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟ?** ΟΧΙ, γιατί όλα τα σήματα $\boxed{x(t)=A\delta(t)}$ (για διάφορες σταθερές A) δίνουν την ίδια έξοδο $\boxed{y(t)=0}$

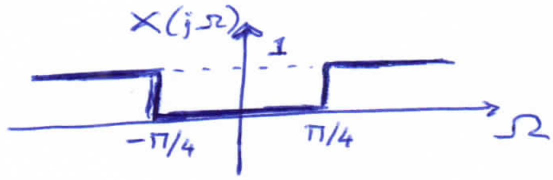
1.4.A

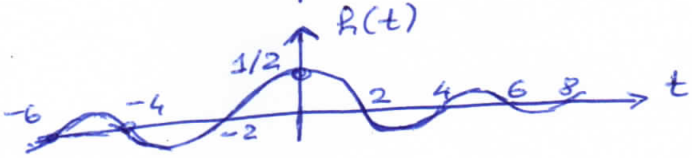
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \delta(t) - \frac{\sin(\pi t/4)}{\pi t} \\ h(t) &= \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = ?$$

- Δουλεύουμε στο πεδίο του μετασχηματισμού: $X(j\Omega) = 1 - \left(u(\Omega+\frac{\pi}{4}) - u(\Omega-\frac{\pi}{4})\right)$

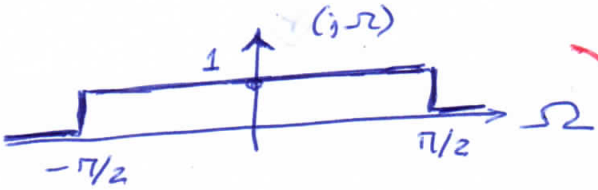


$\overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow}$





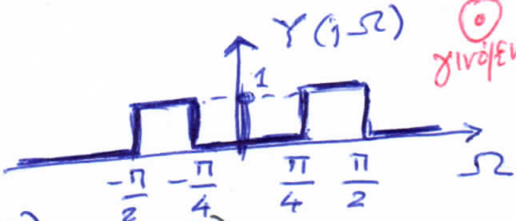
$\overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow}$



γινόμενο

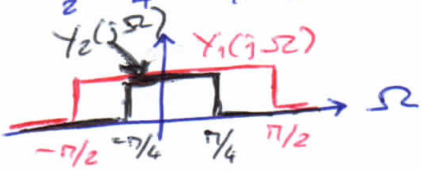
- Από ιδιότητα συνέλιξης:

$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} Y(j\Omega) = X(j\Omega) \cdot H(j\Omega)$$

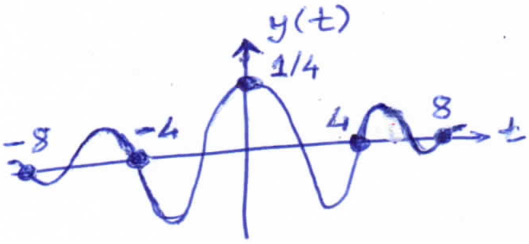


- Παρατηρούμε ότι: $Y(j\Omega) = Y_1(j\Omega) - Y_2(j\Omega)$

$$\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\Longrightarrow} \boxed{y(t) = \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t} - \frac{\sin(\pi t/4)}{\pi t}}$$



- Σχέδιο της $y(t)$ (απαιτεί χρήση MATLAB)



- Εναλλακτικά:

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

ΤΑΥΤΟΤΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

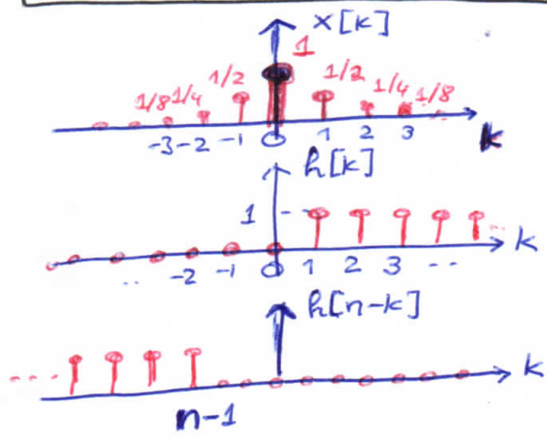
ΧΡΗΣΗ Μ/Σ FOURIER

$$x(t) * h(t) = \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t} * \delta(t) - \frac{\sin(\pi t/4)}{\pi t} * \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t}$$

$$= \frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t} - \frac{\sin(\pi t/4)}{\pi t}$$

1.4. B $x[n] = 2^{-|n|}$, $h[n] = u[n-1] \Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = ?$

• Σχέδιο:



• 2 περιοχές ενδιαφέροντος:

$$n-1 \le 0 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 2^k \overset{k'=-k}{=} \sum_{k'=1-n}^{+\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k'} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-n} = 2^n$$

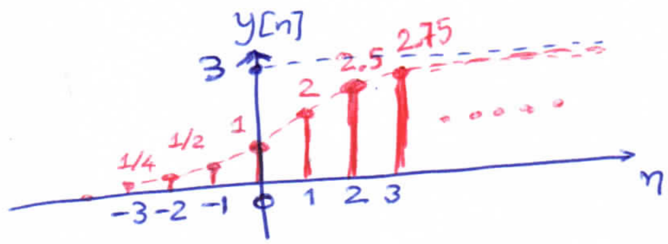
$$n-1 > 0 \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} = \sum_{k'=0}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k'} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1/2} =$$

$$= 3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

• Άρα:

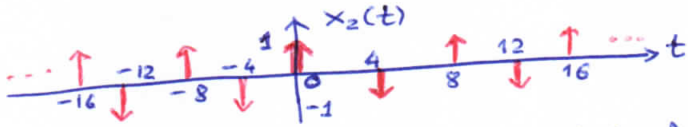
$$y[n] = \begin{cases} 2^n, & \text{για } n \le 1 \\ 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, & \text{για } n \ge 1 \end{cases}$$



$$\boxed{1.5} \quad \boxed{x(t) = \cos(4\pi t) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k\, \delta(t-4k) \Rightarrow \text{F.S.}\ ?}$$

- Εστω $x_1(t) = \cos(4\pi t)$, $\overset{\text{ΕΙΝΑΙ}}{\text{ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ}}$ με $T_1 = 2\pi/(4\pi) = 1/2$

  & $x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k\, \delta(t-4k)$, $\overset{\text{ΕΙΝΑΙ}}{\text{ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ}}$ με $T_2 = 8$ (Βλέπε σχήμα)



- Συνεπώς το $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ θα είναι περιοδικό με $\boxed{T_0 = 8}$

- Άρα $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jk\frac{\pi}{4}t}$ $\quad \left(\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}\right)$

- Από τον τύπο του EULER:

$$x_1(t) = \cos(4\pi t) = \frac{e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}}{2} = \frac{1}{2} e^{j16\frac{\pi}{4}t} + \frac{1}{2} e^{-j16\frac{\pi}{4}t}$$

Άρα, $c_k^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{για } k = \pm 16 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

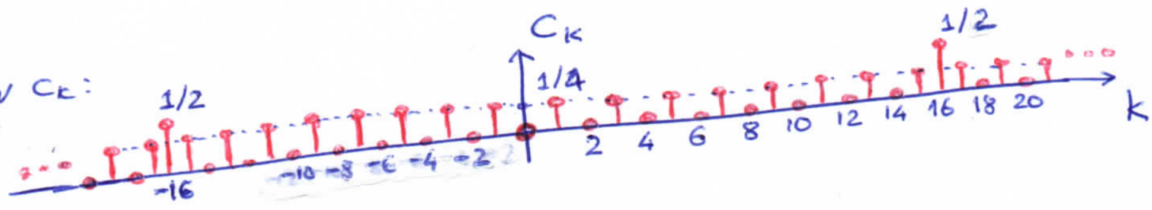
- Για το $x_2(t)$, έχουμε: $\quad c_k^{(2)} = \frac{1}{8}\int_{T_0} x_2(t)\, e^{-jk\frac{\pi}{4}t}\,dt = \frac{1}{8}\int_{-1}^{+7} [\delta(t) - \delta(t-4)]\, e^{-jk\frac{\pi}{4}t}\,dt$

$$= \frac{1}{8}\left(\cancelto{1}{e^{-jk\frac{\pi}{4}0}} - e^{-jk\frac{\pi}{\cancel{4}}\cancel{4}}\right) = \frac{1}{8}\left(1 - (-1)^k\right)$$

Άρα, $\quad c_k^{(2)} = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτια} \\ \frac{1}{4}, & k \text{ περιττά} \end{cases}$

- Συνεπώς, (από γραμμικότητα) $\quad c_k = c_k^{(1)} + c_k^{(2)} = \begin{cases} 0, & k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 14, \pm 18, \pm 20 \cdots \\ 1/2, & k = \pm 16 \\ 1/4, & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots \end{cases}$

- Σχήμα των c_k:



1.6.A $X(j\Omega) = \dfrac{8j\Omega}{\Omega^4+8\Omega^2+16} \xRightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t) = ?$

$$X(j\Omega) = \frac{8j\Omega}{(\Omega^2+4)^2} = -j\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{4}{\Omega^2+4}\right]$$

Εστω $X_1(j\Omega) = -\dfrac{4}{\Omega^2+4} = -\dfrac{2.2}{\Omega^2+2^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x_1(t) = -e^{-2|t|}$

Αρα, αφού $X(j\Omega) = j\dfrac{d}{d\Omega}X_1(j\Omega) \xRightarrow[\text{παραγώγισης στο πεδίο συχνότητας}]{\text{ιδιότητα}} x(t) = -t\,x_1(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = -te^{-2|t|}}$

1.6.B $x(t) = te^{-2t}(\cos(t)+\sin(t))u(t) \xRightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega) = ?$

- Εστω $x_1(t) = te^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\Omega) = \dfrac{1}{(2+j\Omega)^2}$

$x_2(t) = \cos(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(j\Omega) = \pi(\delta(\Omega-1)+\delta(\Omega+1))$

$x_3(t) = \sin(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_3(j\Omega) = \dfrac{\pi}{j}(\delta(\Omega-1)-\delta(\Omega+1))$

- Τότε $x(t) = x_1(t)x_2(t) + x_1(t)x_3(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega) = \dfrac{1}{2\pi}X_1(j\Omega)*X_2(j\Omega) + \dfrac{1}{2\pi}X_1(j\Omega)*X_3(j\Omega)$

- Για το 1ο τμήμα του αθροίσματος:

$$\frac{1}{2\pi}X_1(j\Omega)*X_2(j\Omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{[2+j(\Omega-1)]^2}+\frac{1}{[2+j(\Omega+1)]^2}\right) =$$

$$= \frac{1/2[2+j(\Omega-1)]^2 + 1/2[2+j(\Omega+1)]^2}{[2+j(\Omega-1)]^2\cdot[2+j(\Omega+1)]^2} = \frac{2+2j(\Omega-1)-\frac{1}{2}(\Omega-1)^2+2+2j(\Omega+1)-\frac{1}{2}(\Omega+1)^2}{[4+4j\Omega-(\Omega^2-1)]^2}$$

$$= \frac{4+4j\Omega+(j\Omega)^2-1}{[(j\Omega)^2+4j\Omega+4+1]^2} = \frac{(j\Omega+2)^2-1}{[(j\Omega+2)^2+1]^2}$$

- Παρόμοια:

$$\frac{1}{2\pi}X_1(j\Omega)*X_3(j\Omega) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{[2+j(\Omega-1)]^2}-\frac{1}{[2+j(\Omega+1)]^2}\right) =$$

$$= \frac{1/(2j)([2+j(\Omega+1)]^2-[2+j(\Omega-1)]^2)}{[((j\Omega)+2)^2+1]^2} = \frac{2(j\Omega+2)}{[(j\Omega+2)^2+1]^2}$$

- Συνεπώς: $\boxed{X(j\Omega) = \dfrac{(j\Omega+2)^2+2(j\Omega+2)-1}{[(j\Omega+2)^2+1]^2}}$

1.7

$$x(t)=e^{-t}u(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)=e^{-3t}u(t)} \longrightarrow \boxed{\ddot{y}_2(t)+3\dot{y}_2(t)+2y_2(t)=\dot{x}_2(t)+5x_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t)=?\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt=?$$

• Δουλεύουμε στο πεδίο του μ/σ Fourier:

$$x(t)=e^{-t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)=\frac{1}{j\Omega+1}$$

$$h_1(t)=e^{-3t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H_1(j\Omega)=\frac{1}{j\Omega+3}$$

$$\text{ΔΙΑΦ. ΕΞΙΣΩΣΗ} \Rightarrow H_2(j\Omega)=\frac{j\Omega+5}{(j\Omega)^2+3j\Omega+2}$$

λόγω εν σειράς συνδεσμολογίας $\Longrightarrow$

$$\underset{s=j\Omega}{\Longrightarrow} Y(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+3}\cdot\frac{s+5}{s^2+3s+2}=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+3}\cdot\frac{s+5}{(s+2)(s+1)}$$

$$\Longrightarrow Y(s)=\frac{s+5}{(s+1)^2(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{(s+1)^2}+\frac{D}{s+1}$$

$$A=(s+2)Y(s)\Big|_{s=-2}=\frac{s+5}{(s+1)^2(s+3)}\Big|_{s=-2}=3$$

$$B=(s+3)Y(s)\Big|_{s=-3}=\frac{s+5}{(s+1)^2(s+2)}\Big|_{s=-3}=-\frac{1}{2}$$

$$C=(s+1)^2Y(s)\Big|_{s=-1}=\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}\Big|_{s=-1}=2$$

$$D=\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2Y(s)\right]\Big|_{s=-1}=\frac{d}{ds}\Big(\frac{s+5}{\underbrace{(s+2)(s+3)}_{s^2+5s+6}}\Big)\Big|_{s=-1}=\frac{(s+2)(s+3)-(s+5)(2s+5)}{[(s+2)(s+3)]^2}\Big|_{s=-1}=-\frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\underset{j\Omega=s}{\Longrightarrow} Y(j\Omega)=\frac{3}{j\Omega+2}-\frac{1}{2}\frac{1}{j\Omega+3}+2\frac{1}{(j\Omega+1)^2}-\frac{5}{2}\frac{1}{j\Omega+1} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t)=\left[3e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-3t}+2te^{-t}-\frac{5}{2}e^{-t}\right]u(t)}$$

• Τέλος,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt=Y(j\Omega)\Big|_{\Omega=0}=\frac{3}{2}-\frac{1}{6}+2-\frac{5}{2}=\boxed{\frac{5}{6}}$$