Π.Θ.
ΤΗΜΜΥ

ΗΥ 241: ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΛΥΣΕΙΣ $2^{\text{ου}}$ ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΕΞ. 2016-17
ΕΑΡΙΝΟ

2.1.a

$$x[n]=\left[\frac{\sin(\pi n/8)}{\pi n}\right]^2 \Longrightarrow X(e^{j\omega})=?$$

- Από ιδιότητα γινομένου, και θέτοντας $x_1[n]=\frac{\sin(\pi n/8)}{\pi n}$, έχουμε:

$$x[n]=x_1[n]\cdot x_1[n] \Longrightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X_1(e^{j\omega}) \underset{\text{περιοδική συνέλιξη}}{\circledast} X_1(e^{j\omega})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\hat{X}_1(e^{j\omega}) \underset{\text{ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ}}{*} X_1(e^{j\omega})$$

όπου $\hat{X}_1(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|\le\pi/8\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

& $X_1(e^{j\omega})$ η περιοδική επανάληψη της $\hat{X}_1(e^{j\omega})$ με περίοδο 2π

- Άρα

$$\boxed{X(e^{j\omega})=\begin{cases}\frac{1}{8}-\frac{|\omega|}{2\pi}, & |\omega|\le\pi/4\\ 0, & \frac{\pi}{4}\le|\omega|\le\pi\end{cases}}$$

ΕΠΑΝΑΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΟ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ 2π

$$\boxed{2.1.B} \quad \boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{4-2\sqrt{2}\,e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}} \Longrightarrow x[n]=?}$$

• Το πολυώνυμο του παρανομαστή (ως προς $e^{-j\omega}$) έχει ρίζες

$$\frac{2\sqrt{2} \pm j\sqrt{16-8}}{2} = \sqrt{2} \pm j\sqrt{2} = \sqrt{2}(1 \pm j)$$

• Άρα $X(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{[e^{-j\omega}-\sqrt{2}(1+j)][e^{-j\omega}-\sqrt{2}(1-j)]} =$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}(1+j)}\;\frac{1}{\sqrt{2}(1-j)}}{\left[1-e^{-j\omega}\frac{1}{\sqrt{2}(1+j)}\right]\left[1-e^{-j\omega}\frac{1}{\sqrt{2}(1-j)}\right]} = \frac{\frac{1}{4}}{\left[1-e^{-j\omega}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1-j}{2}\right]\left[1-e^{-j\omega}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1+j}{2}\right]}$$

$$= \frac{1/4}{\left[1-e^{-j\omega}\sqrt{2}\,\frac{1-j}{4}\right]\left[1-e^{-j\omega}\sqrt{2}\,\frac{1+j}{4}\right]} =$$

$$\left|\frac{\sqrt{2}(1\pm j)}{4}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left[\frac{1+j}{2}\right]}{1-e^{-j\omega}\frac{\sqrt{2}(1-j)}{4}} + \frac{1/4\cdot\left[\frac{1-j}{2}\right]}{1-e^{-j\omega}\frac{\sqrt{2}(1+j)}{4}}$$

$$\Longrightarrow x[n] = \left(\frac{1}{4}\,\frac{1+j}{2}\left[\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)}_{e^{-j\pi/4}}\frac{1}{2}\right]^n + \frac{1}{4}\,\frac{1-j}{2}\left[\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)}_{e^{j\frac{\pi}{4}}}\frac{1}{2}\right]^n\right)u[n] =$$

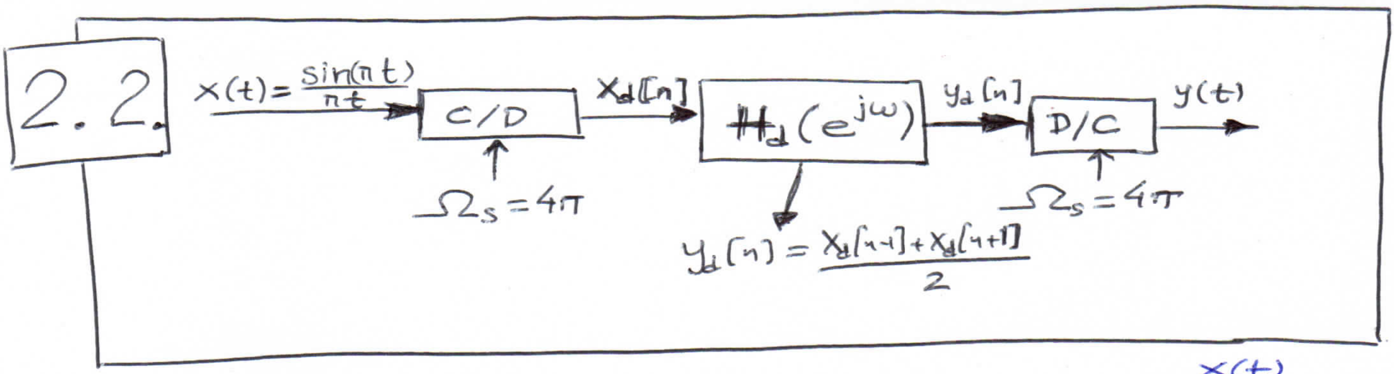
$$= \left[\frac{1+j}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\frac{\pi n}{4}} + \frac{1-j}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{j\frac{\pi n}{4}}\right]\frac{1}{4}\,u[n] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{4}} + \frac{j}{2}e^{-j\frac{\pi n}{4}} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{4}} - \frac{j}{2}e^{j\frac{\pi n}{4}}\right]u[n]$$

$\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

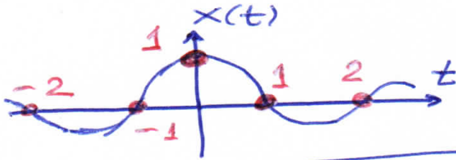
$$\Longrightarrow \boxed{x[n] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\cos\frac{\pi n}{4} + \sin\frac{\pi n}{4}\right]u[n]}$$

2.2



(A) **ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΟΥ $x(t)$**

- Πρόκειται για το κλασσικό "sinc" function

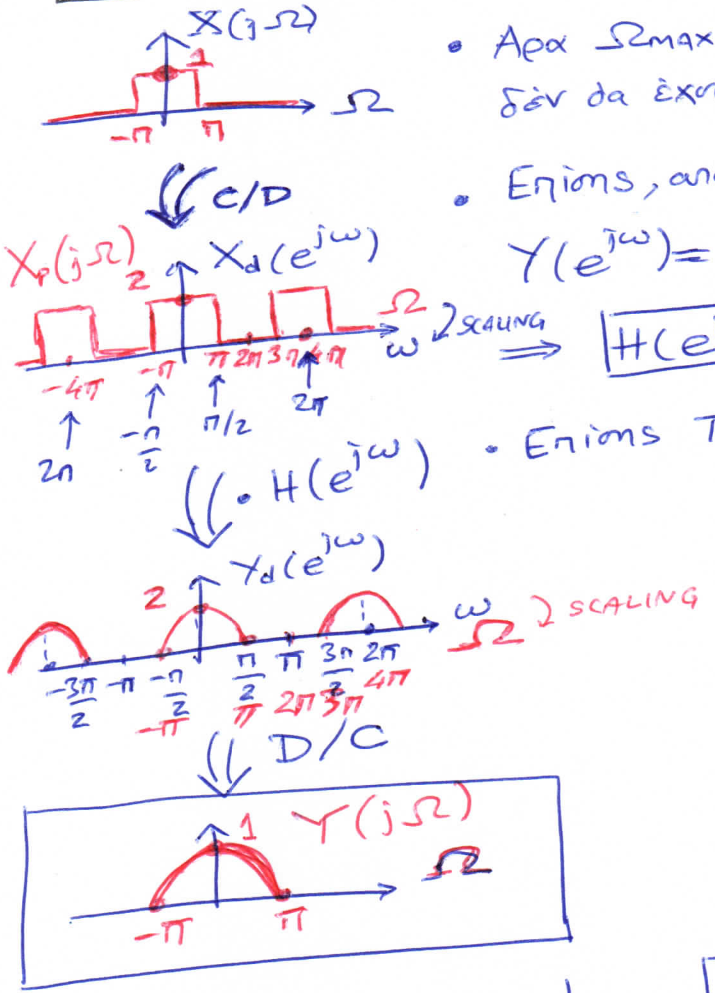


(B) $Y(j\Omega)=?$

- Το φάσμα του $x(t)$ είναι $\boxed{X(j\Omega)=\begin{cases}1, & |\Omega|\leq\pi\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}}$
- Άρα $\Omega_{max}=\pi$, και αφού $\Omega_s=4\pi>2\Omega_{max}$ δεν θα έχουμε αναδίπλωση.
- Επίσης, από τη σχέση εισόδου-εξόδου του $H(e^{j\omega})$:

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2}X(e^{j\omega})\left[e^{-j\omega}+e^{j\omega}\right]\Longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})=\cos(\omega)}$$

- Επίσης $T_s=\frac{2\pi}{\Omega_s}=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$ (άρα $\frac{1}{T_s}=2$)



- Άρα (με βάση τα σχήματα) $\boxed{Y(j\Omega)=\begin{cases}\cos(\Omega/2), & |\Omega|<\pi\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}}$

(C) $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt=?\,,\quad \int |y(t)|^2 dt=?$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = Y(j\Omega)\Big|_{\Omega=0} \Longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt=1}$

- $\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(j\Omega)|^2d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(\Omega/2)\,d\Omega$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\Omega)\,d\Omega=\frac{2\pi}{4\pi}+\frac{1}{4\pi}\sin\Omega\Big|_{-\pi}^{\pi}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}|y(t)|^2dt=1/2}$$

2.3. $\ddot{y}(t) + 101\dot{y}(t) + 100y(t) = \dot{x}(t) + 10x(t)$ (1)

(A) $H(s) = ?$

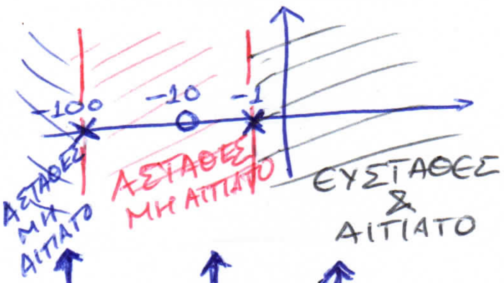
$$(1) \Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{s+10}{s^2+101s+100}} \quad (2)$$

(B) POLE/ZERO PLOT & ROCs

- Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή:

$$H(s) = \frac{s+10}{(s+100)(s+1)} \quad (2a)$$

- Άρα: $\boxed{\begin{array}{l} \text{POLES} = \{-1, -100\} \\ \text{ZEROS} = \{-10, \infty\} \end{array}}$



3 ΔΥΝΑΤΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

(C) $h(t) = ?$ ΓΙΑ ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ

- Προφανώς το ROC: $\boxed{Re\{s\} > -1}$ (3)

- Αναλύουμε την (2) σε μερικά κλάσματα (βλέπε επίσης (2a)):

$$H(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+100}$$

$$A = \left.\frac{s+10}{s+100}\right|_{s=-1} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

$$B = \left.\frac{s+10}{s+1}\right|_{s=-100} = \frac{-90}{-99} = \frac{10}{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{1}{11}\frac{1}{s+1} + \frac{10}{11}\frac{1}{s+100}} \quad (4)$$

Από (3) & (4) $\Rightarrow \boxed{h(t) = \left(\frac{1}{11}e^{-t} + \frac{10}{11}e^{-100t}\right)u(t)}$

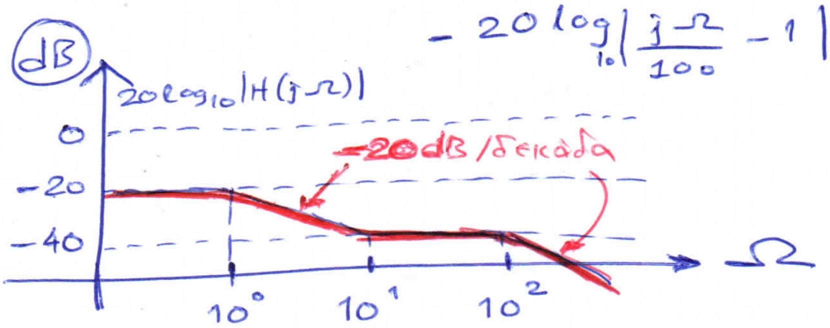
(D) BODE PLOT

- Θέτουμε $s = j\Omega$, και μεταγράφουμε την (2a) ως:

$$H(j\Omega) = \frac{10(j\Omega/10 + 1)}{100\left(\frac{j\Omega}{100}+1\right)(j\Omega+1)} = \frac{1}{10}\frac{\left(\frac{j\Omega}{10}+1\right)}{\left(\frac{j\Omega}{1}+1\right)\left(\frac{j\Omega}{100}+1\right)}$$

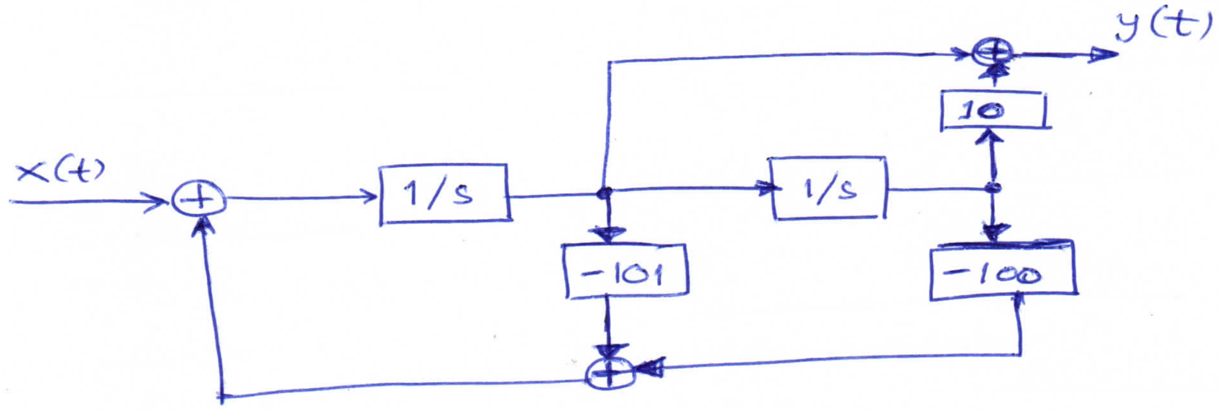
$$\Rightarrow 20\log_{10}|H(j\Omega)| = -20 + 20\log_{10}\left|\frac{j\Omega}{10}+1\right| - 20\log_{10}\left|\frac{j\Omega}{1}+1\right| - 20\log_{10}\left|\frac{j\Omega}{100}-1\right|$$

- Άρα, προσθέτοντας τις γραφικές κάθε όρου, παίρνουμε το ζητούμενο διάγραμμα:

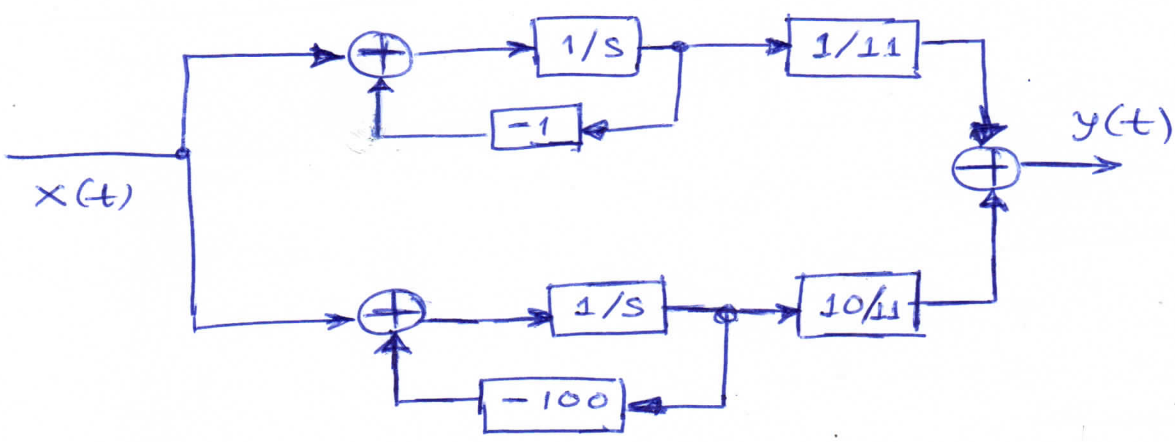


(E) DIRECT & PARALLEL FORM

- DIRECT FORM IMPLEMENTATION (από την (2)):



- PARALLEL FORM IMPLEMENTATION (από την (4)):



2.4. $\frac{1}{6}y[n-2]-\frac{5}{6}y[n-1]+y[n]=6x[n-2]-5x[n-1]+x[n]$

(A) $H(z)=?$

• Από την εξίσωση διαφορών παίρνουμε εύκολα:

$$\boxed{H(z)=\frac{6z^{-2}-5z^{-1}+1}{\frac{1}{6}z^{-2}-\frac{5}{6}z^{-1}+1}} \quad (1)$$

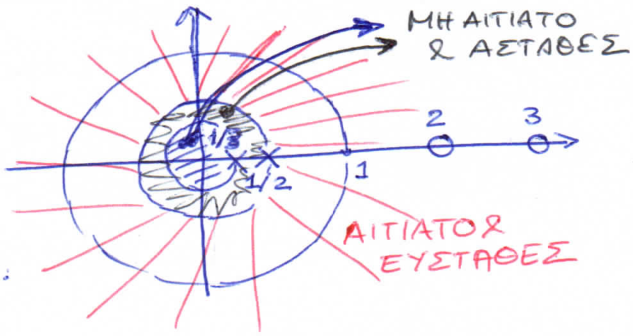
(B) ZERO-POLE DIAGRAM? R.O.C.s?

• Παραγοντοποιούμε την $H(z)$ ως:

$$H(z)=\frac{6-5z+z^2}{\frac{1}{6}-\frac{5}{6}z+z^2}=\frac{(z-3)(z-2)}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})} \quad (1\beta)$$

• Άρα: $\boxed{\begin{array}{l}\text{POLES}=\{\frac{1}{3},\frac{1}{2}\}\\ \text{ZEROS}=\{3,2\}\end{array}}$

• Οι τρεις δυνατές περιοχές σύγκλισης έχουν σχεδιαστεί δεξιά:



(C) $h[n]$? ΕΥΣΤΑΘΕΣ

• Λόγω ευστάθειας, η μόνη δυνατή Π.Σ. είναι η: $\boxed{|z|>1/2}$ (2)

• Παραγοντοποιούμε πάλι την (1) (ως προς z^{-1}) και παρατηρούμε ότι ο βαθμός αριθμητή είναι ίσος με του παρανομαστή. Άρα, στο πρώτο στάδιο:

$$H(z)=A+\frac{Bz^{-1}+C}{\frac{1}{6}z^{-2}-\frac{5}{6}z^{-1}+1}=36+\frac{25z^{-1}-35}{\frac{1}{6}z^{-2}-\frac{5}{6}z^{-1}+1}=$$

$$=36+\frac{25z^{-1}-35}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}=36+\frac{E}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{F}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$E=\left.\frac{25v-35}{1-\frac{1}{2}v}\right|_{v=3}=\frac{40}{-1/2}=-80$$

$$F=\left.\frac{25v-35}{1-\frac{1}{3}v}\right|_{v=2}=\frac{15}{1/3}=45$$

$$=36-\frac{80}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{45}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad (3)$$

• Τέλος, από (2) & (3) παίρνουμε:

$$\boxed{h[n]=36\delta[n]-80\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]+45\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]}$$

D) $|H(e^{j\omega})| = ?$

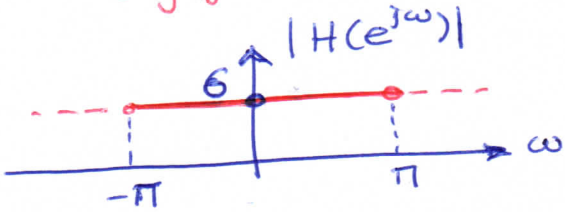
• Από την (1β) και παίρνοντας $z = e^{j\omega}$ έχουμε:

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{e^{j\omega}-3}{e^{j\omega}-\frac{1}{3}} \right| \cdot \left| \frac{e^{j\omega}-2}{e^{j\omega}-\frac{1}{2}} \right| =$$

$$= \frac{\cancelto{1}{|e^{j\omega}|}\,\cancel{|1-3e^{-j\omega}|}}{\frac{1}{3}\,\cancel{|1-3e^{j\omega}|}} \cdot \frac{\cancelto{1}{|e^{j\omega}|}\,\cancel{|1-2e^{-j\omega}|}}{\frac{1}{2}\,\cancel{|1-2e^{j\omega}|}} = 6$$

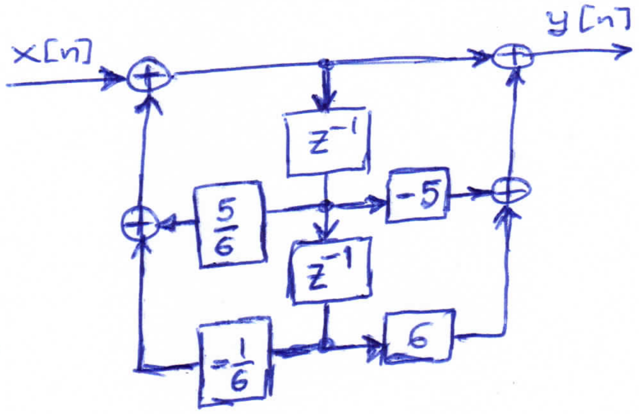
συζυγείς   συζυγείς

• Άρα:



E) ΥΛΟΠΟΙΗΣΕΙΣ

• Κανονική μορφή (DIRECT FORM) από (1):



• ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΟΡΦΗ (PARALLEL FORM) από (3):