Π.Θ. ΤΗΜΜΥ

ΗΥ241: ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΛΥΣΕΙΣ 2ου ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΕΞ. 2015-2016 ΕΑΡΙΝΟ

2.1.ⓐ

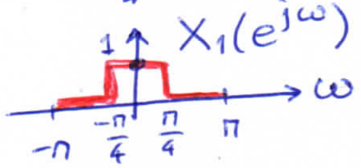
$$\boxed{x[n] = \frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = ?}$$

$$x[n] = \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n}\right]\cdot 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}\cdot\left[e^{j\frac{\pi n}{2}} + e^{-j\frac{\pi n}{2}}\right] \xrightarrow{DTFT}$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})}) + X_1(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})}) \quad [1]$$

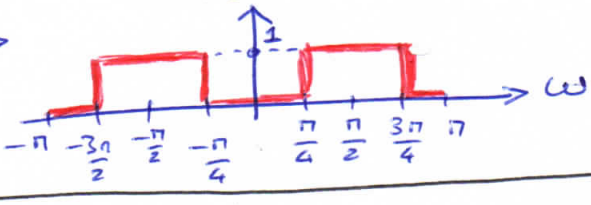
$\updownarrow$ DTFT

$X_1(e^{j\omega})$



[1] $\Longrightarrow$

$X(e^{j\omega})$



Άρα:

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{4} \le |\omega| \le \frac{3\pi}{4} \\ 0, & |\omega| < \pi/4 \\ 0, & \frac{3\pi}{4} < |\omega| \le \pi \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l}\text{επαναλαμβανόμενο} \\ \text{εκτός του } [-\pi,\pi] \\ \text{με περίοδο } 2\pi\end{array}\right)}$$

2.1.ⓑ

$$\boxed{x[n] = (n-2)^2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-2] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = ?}$$

Έστω $\alpha = 1/4$ $(|\alpha|<1)$, από το τυπολόγιο έχουμε (ιδιότητα παραγώγισης):

$$n^2 a^n u[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} j^2\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right] = -\frac{d}{d\omega}\left[-\frac{aje^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}\right] = \dots$$

$$\dots = ae^{-j\omega}\frac{(1+ae^{-j\omega})}{(1-ae^{-j\omega})^3}$$

(ιδιότητα χρονικής μετάθεσης) $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow (n-2)^2 a^{n-2} u[n-2]\cdot a^2 \underset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{a^3 e^{-3j\omega}(1+ae^{-j\omega})}{(1-ae^{-j\omega})^3} \xRightarrow{a=1/4}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{64}\cdot e^{-3j\omega}\cdot\frac{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^3}}$$

2.1.c

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \ln\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right) \Longrightarrow x[n] = ?}$$

- Από την ιδιότητα της παραγώγισης έχουμε ότι:

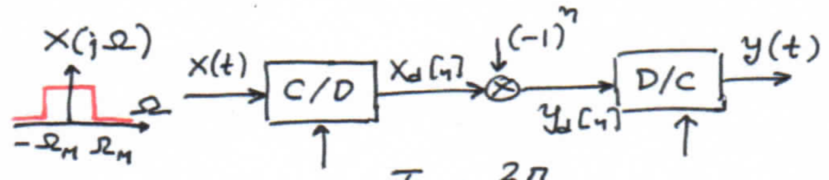
$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} \ln\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right) \Longrightarrow n\,x[n] \xleftrightarrow{DTFT} j^2 \cdot \frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad [1]$$

- Επίσης, γνωρίζουμε (ζεύγος Μ/Σ) ότι:
  + ιδιότητα χρονικής μετατόπισης

$$-\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1] = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad [2]$$

- Από [1]+[2] $\Longrightarrow n\,x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1] \Longrightarrow \boxed{x[n] = \frac{-\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]}{n}}$

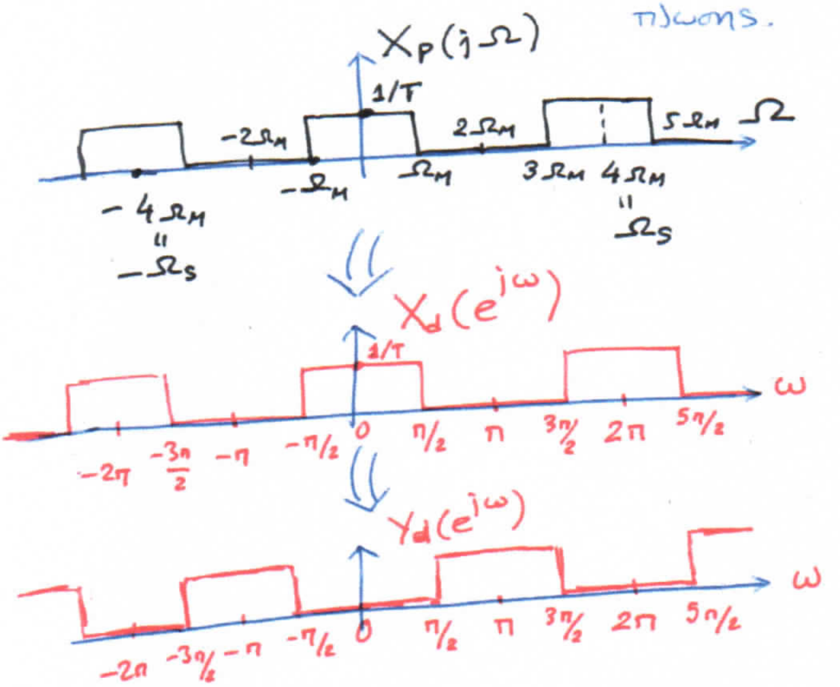
$\boxed{2.2.}$



$$T_s = \frac{2\pi}{4\Omega_M}$$

(A) $X_d(e^{j\omega}), Y_d(e^{j\omega})$

Καθώς $\Omega_s = 4\Omega_M$, υπάρχει υπερ-δειγματοληψία, και συνεπώς όχι πρόβλημα αναδίπλωσης.

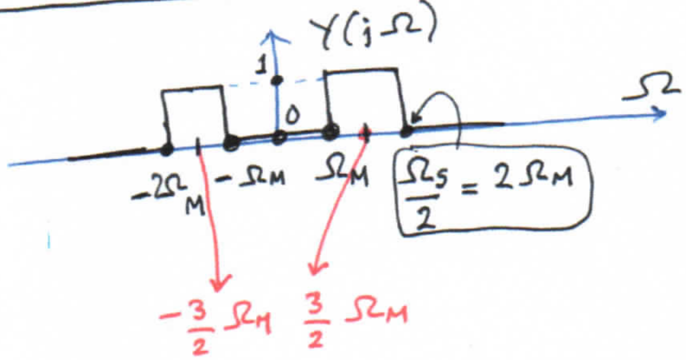


Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $(-1)^n = e^{j\pi n}$,

δηλ: $Y_d(e^{j\omega}) = X_d(e^{j(\omega-\pi)})$

(B) $Y(j\Omega), y(t)$

Μετά από ιδανική ανακατασκευή

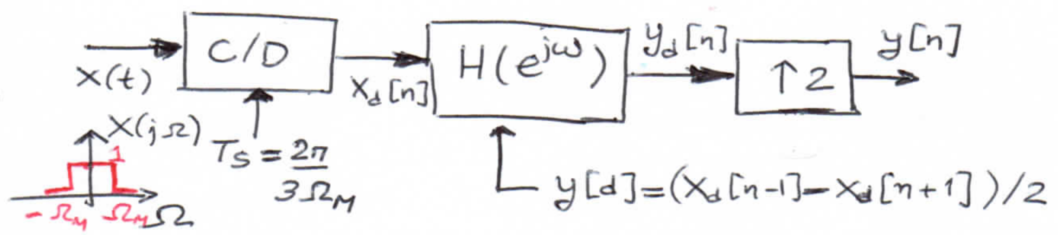


- Το φάσμα μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα δύο μετατοπισμένων παλμών

- Άρα $y(t) = \dfrac{\sin\left(t\frac{\Omega_M}{2}\right)}{\pi t}\left[e^{-j\frac{3}{2}\Omega_M t} + e^{j\frac{3}{2}\Omega_M t}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = 2\cdot\frac{\sin\left(t\frac{\Omega_M}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\Omega_M t\right)}{\pi t}}$$

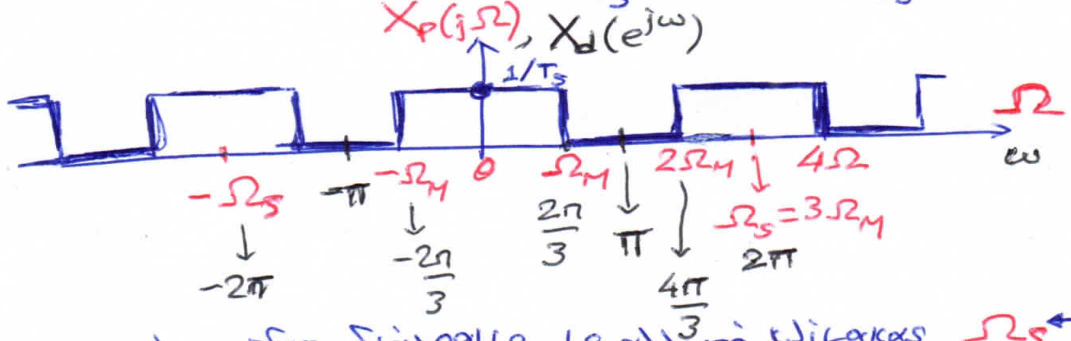
2.3.



- Παρατηρούμε ότι $\Omega_s > 2\Omega_M$, άρα δεν υπάρχει αναδίπλωση.
- Σχεδιάζουμε πρώτα τα $X_p(j\Omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\Omega-k\Omega_s))$

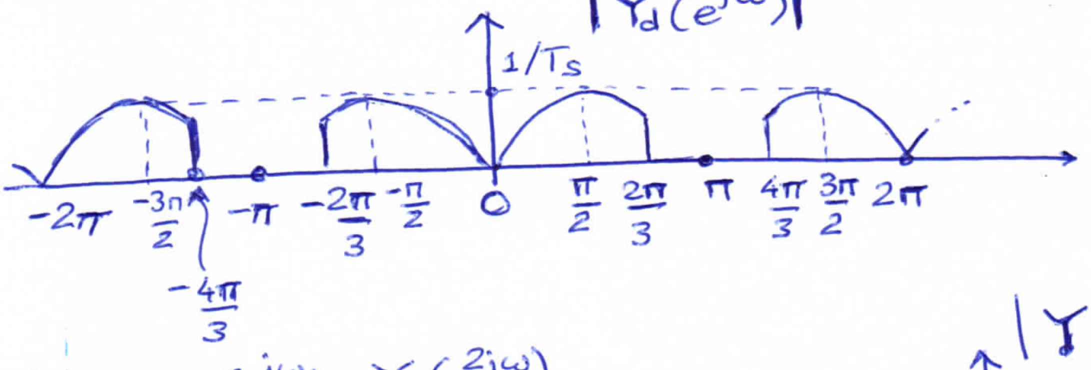
  $3\Omega_M=\frac{2\pi}{T_s}$

  και $X_d(e^{j\omega})=X_p(j\frac{\omega}{T_s})=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(j\left(\frac{\omega-2\pi k}{T_s}\right)\right)$ [1]

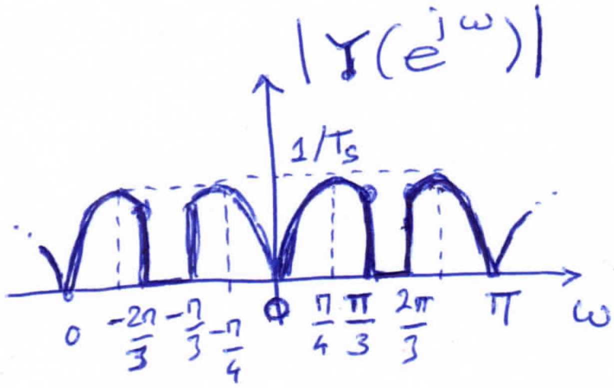


(ουσιαστικά το ίδιο διάγραμμα, με αλλαγή κλίμακας $\Omega_s \leftrightarrow 2\pi$)

- Η εξίσωση διαφορών μας δίνει $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}-e^{j\omega}}{2} = -j\sin(\omega)$ [2]
- Πολ/με τις [1] & [2] και παίρνουμε το μέτρο του γινομένου τους:



- Τέλος, $Y(e^{j\omega})=Y_d(e^{2j\omega})$, άρα $|Y(e^{j\omega})|=|Y_d(e^{2j\omega})|$, όπως έχει σχεδιαστεί στο σχήμα στα δεξιά.



2.4.ⓐ $H(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^2+2s+1}$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ $\Longrightarrow$ ΑΙΤΙΑΤΟ ?

• $H(s)=\dfrac{e^{-s}}{(s+1)^2}$ [1] $\Big\}$ $\Longrightarrow$ Π.Σ.: $Re\{s\} > -1$ [2]

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

• [1], [2] ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ + {ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ} $\Big\}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{h(t)=(t-1)e^{-(t-1)}u(t-1)}$

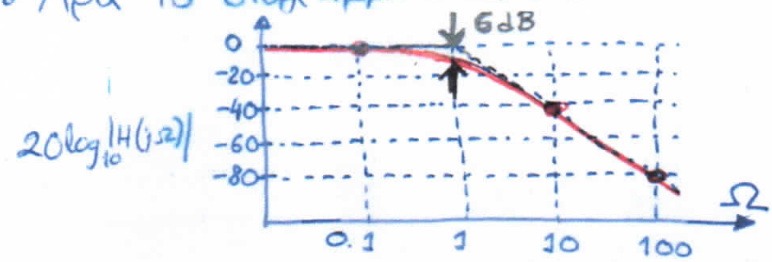
Είναι μηδενική για $t<1$, άρα και για $t<0$, συνεπώς το σύστημα **ΕΙΝΑΙ ΑΙΤΙΑΤΟ.**

2.4.ⓑ Διάγραμμα BODE (ΜΕΤΡΟΥ) της ⓐ

• Λόγω ευστάθειας, $20\log_{10}|H(j\Omega)| = 20\log_{10}\dfrac{\overset{1}{\cancel{|e^{-j\Omega}|}}}{|j\Omega+1|^2}$

$$= -40\log_{10}|j\Omega+1|$$

• Άρα το διάγραμμα είναι το:



2.4.c

$$H(z) = \frac{8z^2 - 8z + 2}{z^2 - 4z + 4}$$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ $\Rightarrow$ ΑΙΤΙΑΤΟ ?

Παρατηρούμε πως $H(z) = \dfrac{8z^2 - 8z + 2}{(z-2)^2}$ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ $\Big\} \Rightarrow$ Π.Σ: $|z| < 2$

που αντιστοιχεί σε "αριστερή" ακολουθία

Άρα το σύστημα $\boxed{\text{ΕΙΝΑΙ ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ.}}$

2.4.d

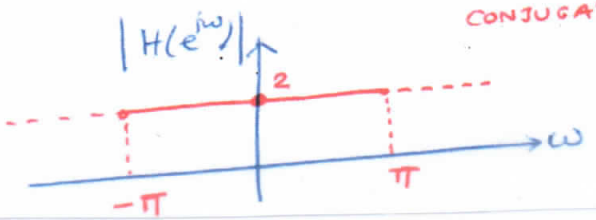
$|H(e^{j\omega})|$ του c

$$H(z) = \frac{8\left(z^2 - z + \frac{1}{4}\right)}{(z-2)^2} = \frac{8\left(z - \frac{1}{2}\right)^2}{(z-2)^2} \xRightarrow{\text{λόγω ευστάθειας}}$$

$$\Rightarrow |H(e^{j\omega})| = \frac{8\,|e^{j\omega} - 1/2|^2}{|e^{j\omega} - 2|^2} = \frac{8\,\cancel{|e^{j\omega}|^2}^{\,1}\,\left|1 - \frac{e^{-j\omega}}{2}\right|^2}{4\,\left|1 - \frac{e^{j\omega}}{2}\right|^2}$$

CONJUGATES

$$\Rightarrow \boxed{|H(e^{j\omega})| = 2}$$



2.5.

$$\boxed{2\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\ddot{x}(t) + 8\dot{x}(t) + 3x(t)}$$

(A) $\boxed{h(t) = ?}$

Απο τη διαφορική εξίσωση παίρνουμε εύκολα τη συνάρτηση μεταφοράς:

- $H(s) = \dfrac{4s^2+8s+3}{2s^2+4s+2} = 2 - \dfrac{1}{2s^2+4s+2} = 2 - \dfrac{1/2}{(s+1)^2}$

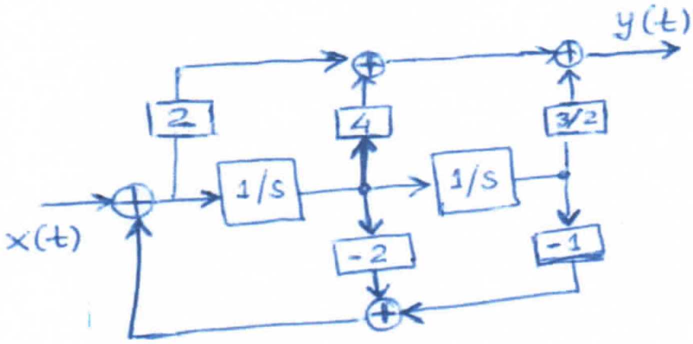
- Λόγω ευστάθειας, Π.Σ.: $Re\{s\} > -1$

$$\Longrightarrow \boxed{h(t) = 2\delta(t) - \frac{1}{2} t e^{-t} u(t)}$$

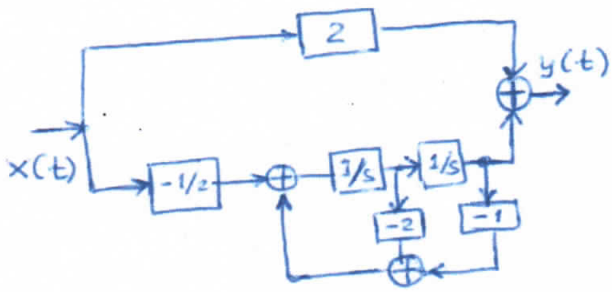
(B) ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

- $H(s) = \dfrac{2s^2+4s+\frac{3}{2}}{s^2+2s+1}$

- $H(s) = 2 - \dfrac{1/2}{s^2+2s+1}$



DIRECT FORM



PARALLEL FORM

2.6. ΕΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ $\Rightarrow H(z),\ h[n]$ + DIRECT FORM

ⓐ • Πρόκειται για διάγραμμα υλοποίησης εν παραλλήλω, συνεπώς:

$$H(z) = 1 + \frac{1}{1 + z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}} \quad [1]$$

$$= \frac{\frac{1}{4} z^{-2} + z^{-1} + 2}{\frac{1}{4} z^{-2} + z^{-1} + 1} \quad [2] \quad = \boxed{\frac{z^{-2} + 4z^{-1} + 8}{z^{-2} + 4z^{-1} + 4}}$$

• Απο την [1] παίρνουμε:

$$H(z) = 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} z^{-1}\right)^2} \xrightarrow{\text{Λόγω ΑΙΤΙΟΤΗΤΑΣ Π.Σ. } |z|>1/2} \boxed{h[n] = \delta[n] + (n+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]}$$

ⓑ • Διάγραμμα υλοποίησης σε κανονική μορφή (από [2]):