Π.Θ. ΤΗΜΜΥ	ΗΥ241 : ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

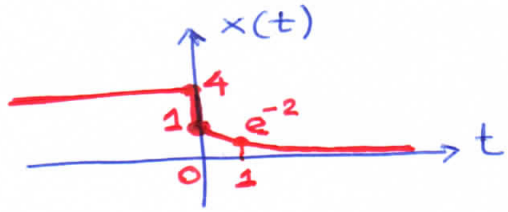
ΛΥΣΕΙΣ 1ΟΥ ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ	ΕΞ: 2015-2016 ΕΑΡΙΝΟ

ΑΣΚ. 1.1(a)

$x(t) = 4u(-t) + e^{-2t}u(t)$

ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ή ΙΣΧΥΟΣ ?

• Σχεδιάζουμε το σήμα:



• Λόγω της μορφής του σήματος για αρνητικά t, υποψιαζόμαστε ότι πρόκειται για σήμα <u>ισχύος</u>. Έχουμε λοιπόν:

$$P_{2T} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{0} 16\, dt + \frac{1}{2T}\int_{0}^{T} e^{-4t} dt$$

$$= \frac{16T}{2T} + \frac{1}{2T}\frac{1}{4}e^{-4t}\Big|_{T}^{0} = 8 + \frac{1}{8T}(1 - e^{-4T}) \xrightarrow[T\to\infty]{} 8$$

καθώς: $\lim_{T\to\infty}\frac{e^{-4T}}{8T} = 0$ $\qquad$ <u>ΑΡΑ</u>: $\boxed{P_\infty = 8}$

ΑΣΚ. 1.1(b)

$x[n] = j e^{j\pi\frac{n}{3}} + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ ?

• Παρατηρούμε ότι το $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ είναι μία σταθερά, οπότε δεν επηρεάζει την απάντηση.

• Στη συνέχεια, για το εκθετικό, παρατηρούμε ότι $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{(\pi/3)} = 6$ που είναι ακέραιος, άρα $\boxed{N = 6}$ αποτελεί τη ζητούμενη <u>περίοδο</u> του σήματος.

ΑΣΚ. 1.2

$$y[n] = \begin{cases} -x[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ?

(a) ΑΙΤΙΑΤΟ? $\boxed{\text{ΝΑΙ}}$

Είναι, γιατί σε κάθε χρονική στιγμή n, η έξοδός του εξαρτάται μόνο από την είσοδό του την ίδια χρονική στιγμή n, δηλ. $y[n] = f(x[n])$

(b) ΓΡΑΜΜΙΚΟ? $\boxed{\text{ΝΑΙ}}$ Εύκολα κανείς μπορεί να δείξει ότι αν $x_1[n] \to y_1[n]$ και $x_2[n] \to y_2[n]$, τότε $a x_1[n] + b x_2[n] \to a y_1[n] + b y_2[n]$, καθώς

$$\begin{cases} -a x_1[n] - b x_2[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ +a x_1[n] + b x_2[n], & n \leq -1 \end{cases} = a \begin{cases} -x_1[n], & n \geq 1 \\ 0 \\ x_1[n], & n \leq -1 \end{cases} + \beta \begin{cases} -x_2[n], & n \geq 1 \\ 0 \\ x_2[n], & n \leq -1 \end{cases} =$$

$$= a y_1[n] + b y_2[n], \quad \forall a, \beta, x_1[n], x_2[n]$$

(c) ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ? $\boxed{\text{ΟΧΙ}}$. Έστω για παράδειγμα $x_1[n] = \delta[n]$ και $x_2[n] = x_1[n-1] = \delta[n-1]$.

Τότε $y_1[n] = \begin{cases} -\delta[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ +\delta[n], & n \leq -1 \end{cases} = 0, \forall n$

$y_2[n] = \begin{cases} -\delta[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ \delta[n-1], & n \leq -1 \end{cases} = -\delta[n-1]$

και προφανώς $y_2[n] \neq y_1[n-1]$

(d) ΕΥΣΤΑΘΕΣ? $\boxed{\text{ΝΑΙ}}$. Καθώς, προφανώς $|y[n]| \leq |x[n]|, \forall n$ (από την σχέση εισόδου-εξόδου), για κάθε φραγμένο σήμα εισόδου $|x[n]| \leq B_x$, θα έχουμε φραγμένο σήμα εξόδου $|y[n]| \leq B_x$.

(e) ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟ? $\boxed{\text{ΟΧΙ}}$. Μπορεί κανείς να δει ότι όλα τα σήματα $x[n] = u[n] + A\delta[n]$ έχουν την ίδια έξοδο $y[n] = -u[n-1]$, ανεξαρτήτως του A, άρα το σύστημα δεν είναι αντιστρέψιμο.

(f) $x[n] = u[n] \Rightarrow y[n] = ?$

Από τον ορισμό σχέσης εισόδου/εξόδου: $y[n] = \begin{cases} -1, & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ 0, & n \leq -1 \end{cases} = -u[n-1]$

ΑΣΚ. 1.3

$x(t) = u(t-3) - u(t-5)$

$h(t) = e^{-3t}u(t)$

$x(t) * h(t) = ?$

$\dfrac{dx(t)}{dt} * h(t) = ?$

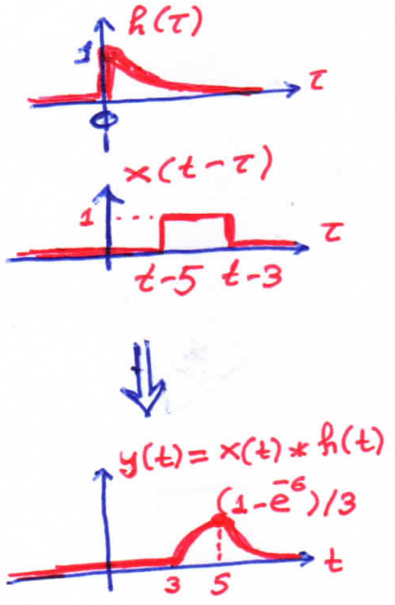
- Η δεύτερη συνέλιξη προκύπτει εύκολα, γιατί:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t-3) - \delta(t-5)$$

και το $\delta(\cdot)$ αποτελεί ταυτοτικό στοιχείο της συνέλιξης, κατά συνέπεια:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} * h(t) = e^{-3(t-3)}u(t-3) - e^{-3(t-5)}u(t-5)}$$

- Στη συνέχεια, επικεντρωνόμαστε στον υπολογισμό της πρώτης συνέλιξης, σχεδιάζοντας τα δύο σήματα, $h(\tau)$ κ $x(t-\tau)$ [ως προς τ]:



- Ολισθαίνοντας το $x(t-\tau)$ για διάφορα t, διακρίνουμε τρεις περιοχές ενδιαφέροντος

(a) $t-3<0 \Leftrightarrow \boxed{t<3}$, όπου $\boxed{y(t)=0}$ (δεν υπάρχει επικάλυψη)

(b) $t-3 \geq 0 \ \& \ t-5<0 \Leftrightarrow \boxed{3 \leq t < 5}$, όπου:

$$y(t) = \int_0^{t-3} e^{-3\tau}d\tau \Leftrightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{3}\left(1-e^{-3t+9}\right)}$$

(c) $t-5 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{5 \leq t}$, όπου:

$$y(t) = \int_{t-5}^{t-3} e^{-3\tau}d\tau = \frac{1}{3}\left[e^{-3(t-5)} - e^{-3(t-3)}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = e^{-3(t-5)} \cdot \frac{1-e^{-6}}{3}}$$

ΑΣΚ. 1.4

$x[n] = 3^n u[1-n]$

$h[n] = u[n]$

$x[n] * h[n] = ?$

Στο σχήμα (αριστερά) φαίνονται σχεδιασμένα τα σήματα $x[k]$ και $h[n-k]$. Είναι προφανές ότι τα σήματα έχουνε μη μηδενική επικάλυψη για όλα τα n. Για $n \geq 1$, το πεδίο επικάλυψης παραμένει σταθερό και είναι το διάστημα $k \leq 1$. Άρα για $n \geq 1$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=1} 3^k = 3 + \sum_{k=-\infty}^{0} 3^k = 3 + \sum_{r=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^r = 3 + \frac{1}{1-(1/3)} = \frac{9}{2} ,$$

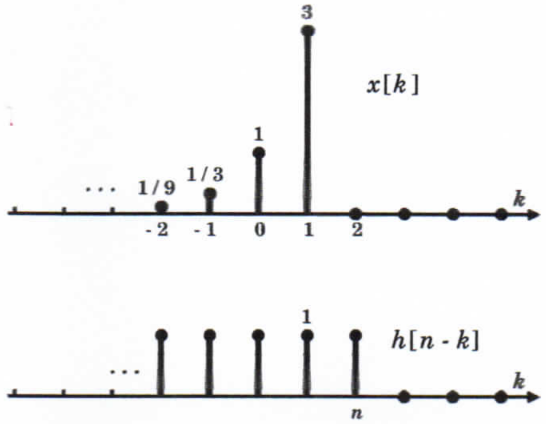
δηλαδή το $y[n]$ κρατάει σταθερή τιμή 4.5 για $n \geq 1$.
Για $n < 1$ επικάλυψη των σημάτων λαμβάνει χώρα μόνο για $k \leq n$. Συνεπώς:

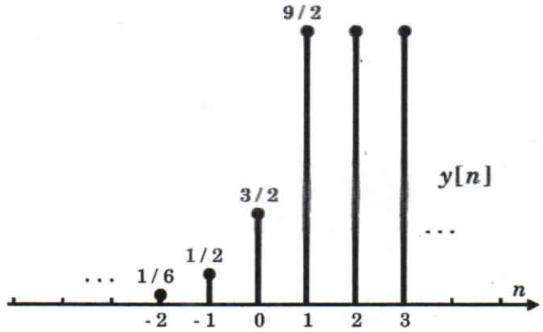
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 3^k = \sum_{l=-n}^{+\infty} (\frac{1}{3})^l = \sum_{m=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^{m-n} = (\frac{1}{3})^{-n} \sum_{m=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^m = 3^n \frac{3}{2} = \frac{3^{n+1}}{2} .$$

Συνεπώς:

$$y[n] = \begin{cases} 9/2 , & \text{για } n \geq 1 \\ 3^{n+1}/2 , & \text{αλλού} \end{cases} .$$

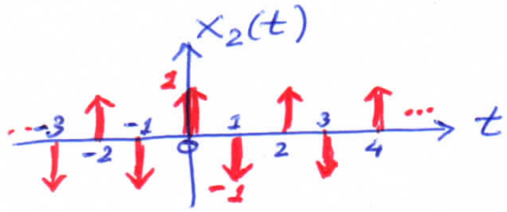
Η συνέλιξη είναι σχεδιασμένη στο δεξιό μέρος του σχήματος.





ΑΣΚ. 1.5 (α)

$$x(t) = -2\cos(2\pi t) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t-n) \Rightarrow F.S.$$



• Το σήμα $x(t)$ είναι άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων,

$$x_1(t) = -2\cos(2\pi t) \quad \text{με περίοδο} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

και του $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n \delta(t-n)$, που όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα έχει περίοδο $T_2 = 2$.

• Άρα το $x(t)$ έχει περίοδο $\boxed{T=2}$, και συνεπώς $\boxed{\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi}$

• Αναζητούμε λοιπόν σειρά Fourier $\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\pi t}}$,

όπου, λόγω γραμμικότητας, $c_k = c_k^{(1)} + c_k^{(2)}$

(από την ανάπτυξη του $x_1(t)$ σε F.S.) (από την ανάπτυξη του $x_2(t)$ σε F.S.)

• Για το $x_1(t)$, με απλή επισκόπηση και τον τύπο του Euler, έχουμε:

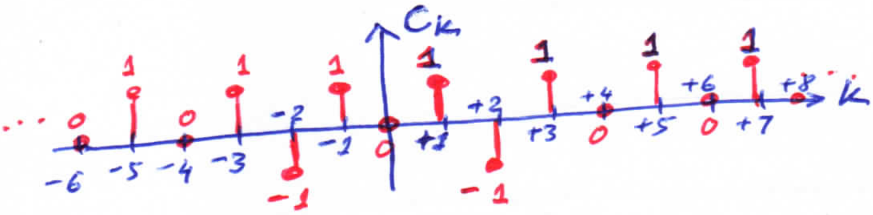
$$-2\cos(2\pi t) = -e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}$$

οι όροι αυτοί αντιστοιχούν σε αρμονικές για $k = \pm 2$ (αφού $\Omega_0 = \pi$)

• Για το $x_2(t)$, έχουμε, ολοκληρώνοντας σε μία περίοδο του σήματος (πχ: $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$):

$$c_k^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{3/2} (\delta(t) - \delta(t-1)) e^{-jk\pi t} dt = \frac{1-e^{-jk\pi}}{2} = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιο} \\ 1, & k \text{ περιττό} \end{cases}$$

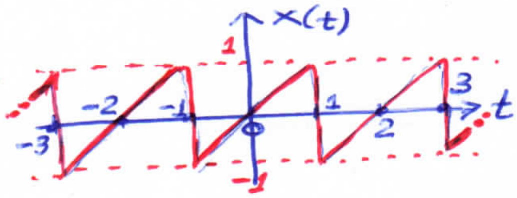
• Λαμβάνοντας υπόψη και τα $c_k^{(1)}$ που βρήκαμε προηγουμένως έχουμε:



δηλ: $c_k = \begin{cases} 1, & k \text{ περιττό} \\ -1, & k = \pm 2 \\ 0, & k \text{ άρτιο}, \neq \pm 2 \end{cases}$

ΑΣΚ. 1.5 (b)

$x(t)$ περιοδικό με $T=2$ και $x(t)=t$, για $t\in[-1,1]$ $\Longrightarrow$ F.S. ?



- Το σήμα, σχεδιασμένο στα δεξιά, είναι περιοδικό με $T=2 \Longrightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
- Για εύρεση των C_k, των συντελεστών δηλ. της σειράς Fourier: $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\pi t}$, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο που υπολογίζει τα C_k, με τη βοήθεια επίσης και της σχέσης: $\int y(t)\frac{dz(t)}{dt}\,dt = y(t)z(t) - \int \frac{dy(t)}{dt}\cdot z(t)\,dt$
- Έχουμε λοιπόν:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\pi t}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t e^{-jk\pi t}dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t}{jk\pi}\frac{d}{dt}\left(e^{-jk\pi t}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{t}{jk\pi}e^{-jk\pi t}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{1}{jk\pi}e^{-jk\pi t}dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-jk\pi}+e^{jk\pi}}{jk\pi} + \frac{1}{j^2k^2\pi^2}e^{-jk\pi t}\Big|_{-1}^{1}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-jk\pi}+e^{jk\pi}}{jk\pi} - \frac{e^{-jk\pi}-e^{jk\pi}}{k^2\pi^2}\right] = -\frac{\cos(k\pi)}{jk\pi} - j\cancel{\frac{\sin(k\pi)}{k^2\pi^2}}^{\,0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_k = \frac{j(-1)^k}{k\pi}}, \text{ για } k\neq 0$$

- Προφανώς, λόγω της ύπαρξης του k στον παρονομαστή, υπολογίζουμε το C_0 $(k=0)$ ξεχωριστά ως:

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,dt = 0}$$

ΑΣΚ. 1.6 (a)

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{6}{\Omega^2-2\Omega+10}\right)=?$$

• Θα χρησιμοποιήσουμε το ζευγάρι Μ/Σ Fourier:

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{\Omega^2+a^2} \quad (\text{με } a>0)$$

και την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης.

• Παρατηρούμε ότι:

$$X(j\Omega)=\frac{6}{\Omega^2-2\Omega+10}=\frac{6}{(\Omega^2-2\Omega+1)+9}=\frac{6}{(\Omega-1)^2+9}$$

• Εφόσον (για $a=3$):

$$e^{-3|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\cdot 3}{\Omega^2+3^2}=\frac{6}{\Omega^2+9},$$

άρα:

$$e^{j\cdot 1\cdot t}e^{-3|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{6}{(\Omega-1)^2+9}=X(j\Omega)$$

• Συνεπώς: $\boxed{x(t)=e^{-3|t|+jt}}$

ΑΣΚ. 1.6 (b)

$$\mathcal{F}\left(te^{-4t}\cos(t)\,u(t)\right)=?$$

• Από τον τύπο του Euler έχουμε:

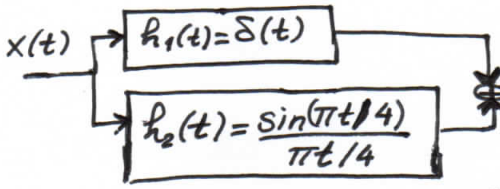
$$x(t)=te^{-4t}\cdot\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\cdot u(t)=\frac{1}{2}te^{-t(4-j)}u(t)+\frac{1}{2}te^{-t(4+j)}u(t)$$

• Καθώς: $te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(a+j\Omega)^2}$ για $Re\{a\}>0$, το οποίο ισχύει στην περίπτωσή μας για τα $a=4\pm j$,

έχουμε:

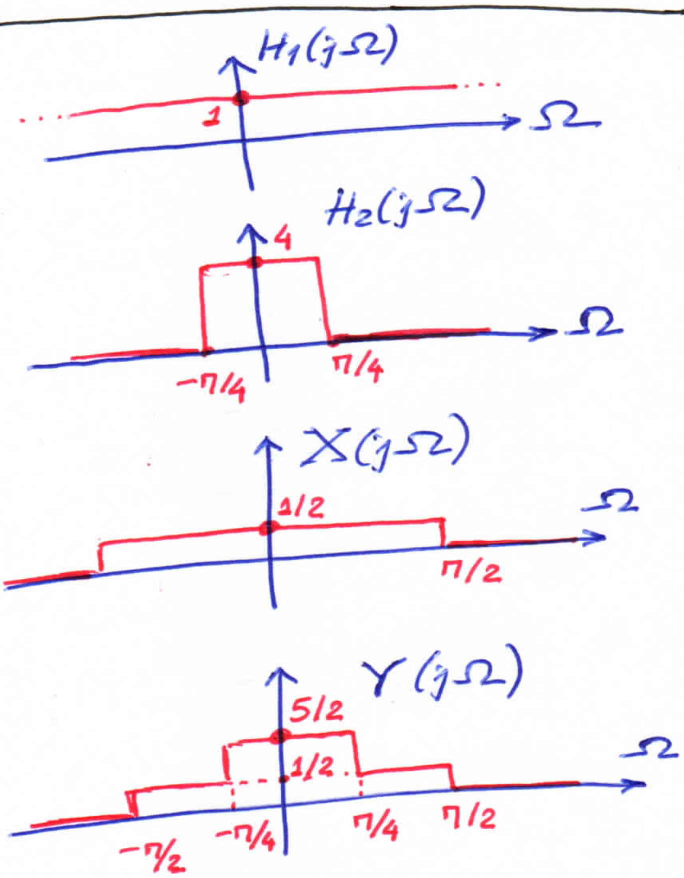
$$\boxed{X(j\Omega)=\frac{1}{2}\frac{1}{[4+j(\Omega-1)]^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{[4+j(\Omega+1)]^2}}$$

ΑΣΚ. 1.7



$$X(j\Omega)=\begin{cases}1/2, & |\Omega|<\pi/2\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = ? \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2\,dt = ?$$



- Η εν παραλλήλω συνδεσμολογία ισοδυναμεί με σύστημα κρουστικής απόκρισης

$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$$

ή ισοδύναμα, στο πεδίο της συχνότητας

$$H(j\Omega)=H_1(j\Omega)+H_2(j\Omega)$$

όπου, από το τυπολόγιο:

$$H_1(j\Omega)=1, \quad \forall\Omega$$

$$H_2(j\Omega)=\begin{cases}4, & |\Omega|<\pi/4\\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma.\end{cases}$$

- Επίσης:

$$X(j\Omega)=\begin{cases}1/2, & |\Omega|<\pi/2\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases},$$

συνεπώς (βλέπε επίσης σχήμα):

$$Y(j\Omega)=\big(H_1(j\Omega)+H_2(j\Omega)\big)X(j\Omega)=$$

$$=\begin{cases}5/2, & |\Omega|<\pi/4\\ 1/2, & \frac{\pi}{4}\le|\Omega|<\pi/2\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

- Από τον ορισμό του Μ/Σ Fourier: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = Y(j\Omega)\Big|_{\Omega=0} = 5/2}$

- Από το Θεώρημα Parseval: $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(j\Omega)|^2\,d\Omega =$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{25}{4}+\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{4}\right]=\boxed{\frac{13}{4}}$$

ΑΣΚ. 1.8

$$\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6y(t) = \dot{x}(t)+4x(t)$$

(a) $H(j\Omega)=?$

(b) $h(t)=?$

(c) $x(t)=(e^{-4t}-te^{-4t})u(t) \rightarrow y(t)=?$

(a) Η απόκριση συχνότητας δίνεται από:

$$H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}=\frac{j\Omega+4}{(j\Omega)^2+5j\Omega+6}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\Omega)=\frac{4+j\Omega}{6-\Omega^2+5j\Omega}}$$

(b) Αναλύοντας την παραπάνω σε μερικά κλάσματα, παίρνουμε:

$$H(j\Omega)=\frac{4+j\Omega}{(2+j\Omega)(3+j\Omega)}=\frac{2}{2+j\Omega}-\frac{1}{3+j\Omega}$$

$$\Rightarrow h(t)=\mathcal{F}^{-1}\{H(j\Omega)\}=\boxed{2e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)}$$

(c) Ο μ/σ Fourier του σήματος εισόδου είναι:

$$X(j\Omega)=\mathcal{F}\{x(t)\}=\frac{1}{4+j\Omega}-\frac{1}{(4+j\Omega)^2}=\frac{3+j\Omega}{(4+j\Omega)^2}$$

Κατά συνέπεια,

$$Y(j\Omega)=X(j\Omega)H(j\Omega)=\frac{\cancel{(4+j\Omega)}}{(2+j\Omega)\cancel{(3+j\Omega)}}\cdot\frac{\cancel{3+j\Omega}}{(4+j\Omega)^{\cancel{2}}}$$

$$=\frac{1}{(2+j\Omega)(4+j\Omega)}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{2+j\Omega}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{4+j\Omega}$$

$$\Rightarrow y(t)=\mathcal{F}^{-1}\{Y(j\Omega)\}=\boxed{\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)-\frac{1}{2}e^{-4t}u(t)}$$